第一章　矢量代数

§1.1　纯量与矢量

1.　纯量

仅由数量确定的物理量，或由一个具有实数值的、空间一点的函数所确定的物理量，称为纯量。

假若纯量与坐标系的选择无关，则称为绝对纯量，或不变量。例如，任何实数、质量、密度、长度、时间、温度和力做的功、能量等。

今后，凡谈到诸如张量一类的纯量，都是指绝对纯量。在研究张量的解析性质时，还将遇到与坐标系选择有关的纯量。

2.　矢量

我们先把用数值(大小)和方向表征的物理量称为矢量。矢量用黑体小写拉丁字母 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、…，$\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$、…表示。作图时用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示(图 1.1)。有向线段的长度表示矢量的大小或模。矢量的大小(模)记为

$$|\boldsymbol{a}| \equiv a \qquad (1.1)$$

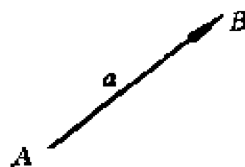


图　1.1

固结于空间某一点(作用点)的矢量称为固定矢量，沿着某一直线但没有一定作用点的矢量称为滑动矢量，既无一定作用线又无一定作用点的矢量称为自由矢量。本书所讨论的矢量代数运算适用于自由矢量。

应当指出，不是凡具有数值与方向的物理量都能作为矢量，矢

量还应具有由矢量代数运算规则(见本章 § 1.2)所确定的特性。

当代表两矢量的线段是平行的,则称两矢量称为平行矢量或

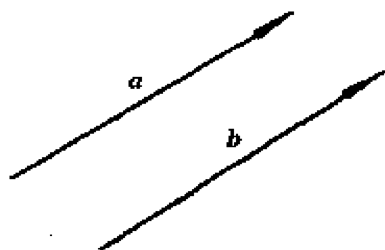


图 1.2

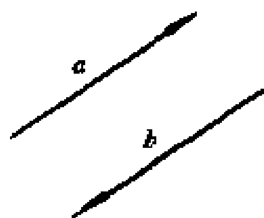


图 1.3

共线矢量。当两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 有相等的模,共线且同向时(图 1.2),则称两矢量相等,即

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b} \tag{1.2}$$

若两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等,共线反向时(图 1.3),记为

$$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b} \tag{1.3}$$

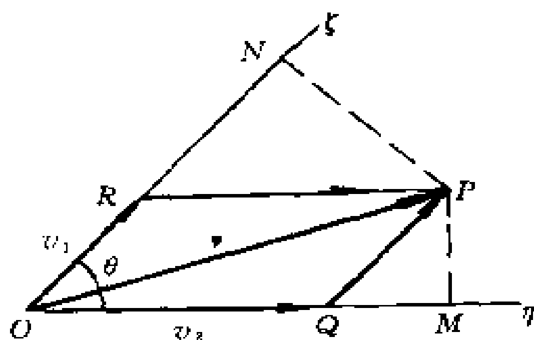


图 1.4

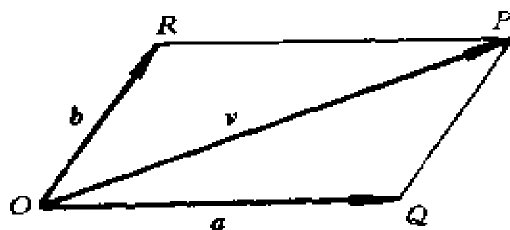


图 1.5

3. 矢量的投影与分量

矢量 $\boldsymbol{v}$ 用有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 表示(图 1.4),过矢量始端 O 建立坐标系 $O\eta\zeta$。过矢量末端 P 分别向两坐标轴作垂线,得矢量 $\boldsymbol{v}$ 在两坐标轴 $O\eta$、$O\zeta$ 上的投影 OM、ON,分别记为 v_1、v_2。过 P 点分别作两坐

标轴的平行线，得矢量 $\boldsymbol{v}$ 沿两坐标轴 $O\eta$、$O\zeta$ 的分量$\overrightarrow{OQ}$、$\overrightarrow{OR}$，记为 v^1、v^2。由图可知 $OQ=RP$，$OR=QP$。若两坐标轴之前的夹角为 θ，则

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= v^1 + v^2\cos\theta \\ v_2 &= v^1\cos\theta + v^2 \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

和

$$\left.\begin{aligned} v^1 &= v_1\csc^2\theta - v_2\csc\theta\text{ctg}\theta \\ v^2 &= -v_1\csc\theta\text{ctg}\theta + v_2\csc^2\theta \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

注意，本书中的上标一般不表示乘幂，平方用$(v)^2$、$(x)^2$ 表示。但在不会引起误会的演算中，我们有时仍用上标表示乘幂。

在直角坐标系里，矢量的投影与分量相等。

§1.2 矢量的加法

1. 矢量加法的平行四边形法则

用有向线段$\overrightarrow{OQ}$、$\overrightarrow{OR}$分别表示矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，由$\overrightarrow{OQ}$、$\overrightarrow{OR}$为邻边所构成的平行四边形的对角线$\overrightarrow{OP}$，即为矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的合矢量 $\boldsymbol{v}$，记为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \tag{1.6}$$

这就是矢量加法的平行四边形法则。一切矢量应该遵守矢量加法法则。矢量加法法则确定了矢量的第三个必要特性。因此，能用有向直线段表示的、且遵守平行四边形加法运算法则的物理量或几何量称为矢量。

矢量减法是矢量加法的逆运算。式(1.6)可改写为

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{b} \tag{1.7}$$

或

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{b}) \tag{1.8}$$

容易证明矢量加法满足交换律和结合律，即

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \tag{1.9}$$

$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} \tag{1.10}$$

2. 单位矢量

模为 1 的矢量称为单位矢量。模 $a\neq0$ 的矢量 $\boldsymbol{a}$，沿 $\boldsymbol{a}$ 方向的单位矢量记为

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{a}}{a} \tag{1.11}$$

任一矢量 $\boldsymbol{a}$ 可以表为与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位矢量 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 的模 a 的乘积，即

$$\boldsymbol{a} = a\hat{\boldsymbol{a}} \tag{1.12}$$

在三维欧几里得空间里，沿直角坐标轴 x、y、z 的单位矢量用 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 或 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$* 表示。

3. 矢量沿直角坐标轴的分量

在三维欧几里得空间里，任一矢量 $\boldsymbol{a}$ 可以表为沿正交的三根

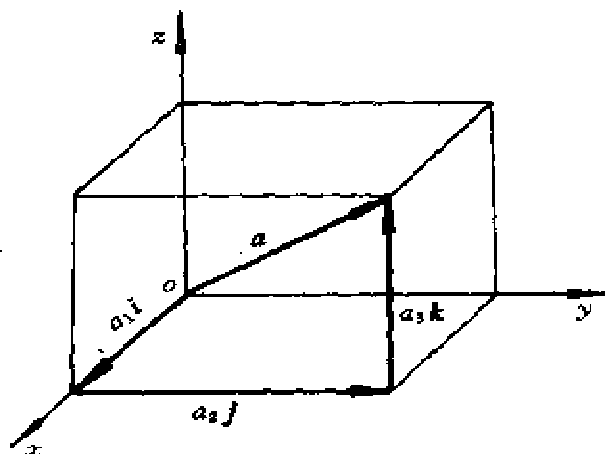


图 1.6

坐标轴 x、y、z 的分矢量 $a_1\boldsymbol{i}$、$a_2\boldsymbol{j}$、$a_3\boldsymbol{k}$ 的矢量和（图 1.6）。

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} \\ &a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2} \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

$\boldsymbol{a}$ 的模是

---

* $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$；$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 等通常都是用来表示沿坐标轴的单位矢量，字母上面的ˆ略去。

例 1.1 写出三维空间笛卡尔直角坐标系中 $P(2,4,3)$ 和 $Q(1,-5,2)$ 两点的位矢方程，用作图法和解析法求这两位矢的合矢量。

解： (i) $\boldsymbol{r}_1=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BP}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{r}_2=\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EQ}=\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$$

(ii) 先用作图法：作 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{r}_1$，$\overrightarrow{OQ}=\boldsymbol{r}_2$，以 $\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$ 为邻边作平

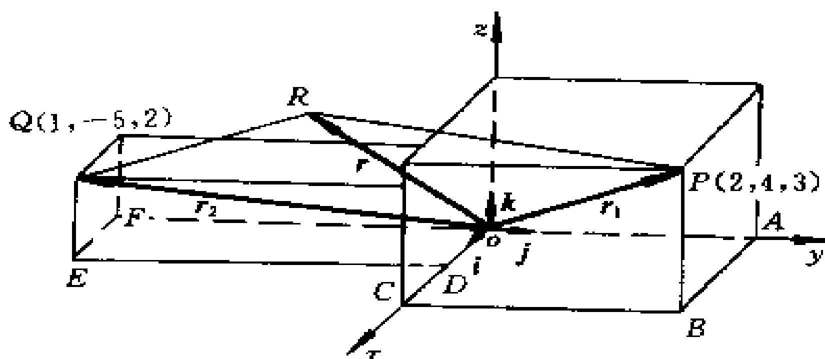


图 1.7

行四边形 $OPRQ$，联对角线 $\overrightarrow{OR}$（图 1.7），即得 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$ 的合矢量 $\overrightarrow{OR}=\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2$。

解析法：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2=(2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})+(\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})$

$$=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$$

例 1.2 已知矢量 $\boldsymbol{r}_1=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}_2=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}_3=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，求下列矢量的模：(i) $\boldsymbol{r}_3$，(ii) $\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3$，(iii) $2\boldsymbol{r}_1-3\boldsymbol{r}_2-5\boldsymbol{r}_3$。

解： (i) $r_3=|\boldsymbol{r}_3|=|-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}|$

$$=\sqrt{(-1)^2+(2)^2+(2)^2}=3$$

(ii) $\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3=(3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})+(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})$

$$+(-\boldsymbol{i}_1+2\boldsymbol{j}_2+2\boldsymbol{k}_3)=4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$$

于是 $|\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3|=|4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}|=\sqrt{(4)^2+(-4)^2+(0)^2}$

$$=\sqrt{32}\doteq 4\sqrt{2}$$

(iii) $2\boldsymbol{r}_1-3\boldsymbol{r}_2-5\boldsymbol{r}_3=2(3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})-3(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})$

$$-5(-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})=5\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

于是
$$|2\boldsymbol{r}_1-3\boldsymbol{r}_2-5\boldsymbol{r}_3|=|5\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}|$$
$$=\sqrt{(5)^2+(-2)^2+(1)^2}$$
$$=\sqrt{30}$$

例 1.3 试求平行于 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$ 两矢量的合矢量 $\boldsymbol{r}$ 的单位矢量，已知 $\boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$。

解： 合矢量 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2=(2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k})+(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})$
$$=3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$$

$$r=|\boldsymbol{r}|=|3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}|=\sqrt{(3)^2+(6)^2+(-2)^2}=7$$

所以，平行于 $\boldsymbol{r}$ 的单位矢量是

$$\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\frac{3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}}{7}=\frac{3}{7}\boldsymbol{i}+\frac{6}{7}\boldsymbol{j}-\frac{2}{7}\boldsymbol{k}$$

检证：$\left|\frac{3}{7}\boldsymbol{i}+\frac{6}{7}\boldsymbol{j}-\frac{2}{7}\boldsymbol{k}\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{6}{7}\right)^2+\left(-\frac{2}{7}\right)^2}=1$

§1.3 矢量的纯量积

1. 矢量与纯量的乘积

矢量 $\boldsymbol{a}$ 与纯量 m 的乘积是矢量 $m\boldsymbol{a}$，这个矢量的模是矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模的 m 倍、方位与 $\boldsymbol{a}$ 相同，指向由 m 的正负号而定，m 为正时，$m\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 指向相同，否则相反。若 $m=0$，则 $m\boldsymbol{a}$ 为零矢量。

若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是矢量，m 和 n 是纯量，则

$$\left.\begin{aligned}
&m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}m && \text{交换律}\\
&m(n\boldsymbol{a})=(mn)\boldsymbol{a} && \text{结合律}\\
&(m+n)\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{a} &&\\
&m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b} &&
\end{aligned}\right\}\tag{1.14}$$

2. 矢量的纯量积

空间某一 x 轴的方向由轴的单位矢量确定。以 $\boldsymbol{e}$ 表示 x 轴的

单位矢量。以 a_x 表示矢量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴方向的投影，并称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与单位矢量 $\boldsymbol{e}$ 的纯量积(又称点积)。如图 1.8 所示，其表达式如下

$$a_x = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e} = |\boldsymbol{a}|\cos\theta \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \tag{1.15}$$

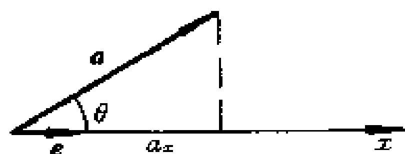


图 1.8

式中 $\cos\theta$ 是矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{e}$ 的正方向夹角的余弦。

同样可确定矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$ 的纯量积。考虑矢量 $\boldsymbol{a}$ 在矢量 $\boldsymbol{b}$ 方向的投影 a_b，可得

$$a_b = \boldsymbol{a} \cdot \hat{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{a} \cdot \frac{\boldsymbol{b}}{b} = a\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

由此得到

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = a_b b = b_a a \tag{1.16}$$

三维空间里，正交坐标轴单位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的纯量积

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1 \tag{1.17}$$

$$\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{i} = 0 \tag{1.18}$$

将矢量表示为沿坐标轴分矢量的矢量和，$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$；$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) \cdot (b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\end{aligned} \tag{1.19}$$

还有

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = (a)^2 = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 \tag{1.20}$$

若 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}=0$，且 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 都不是零矢量，则 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 互相垂直。

容易证明，纯量积满足交换律和分配律，即

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} \tag{1.21}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} \tag{1.22}$$

还有

$$m(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = (m\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot (m\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})m \tag{1.23}$$

例 1.4 求矢量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=6\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 之间的夹角。

解： $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=ab\cos\theta$

$$a=\sqrt{(2)^2+(2)^2+(-1)^2}=3,$$

$$b=\sqrt{(6)^2+(-3)^2+(2)^2}=7$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(2)(6)+(2)(-3)+(-1)(2)=12-6-2=4$$

于是 $$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{ab}=\frac{4}{3\times7}=\frac{4}{21}=0.1905$$

$$\theta=79°1'$$

例 1.5 求矢量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 在矢量 $\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$ 上的投影。

解： 矢量 $\boldsymbol{b}$ 沿其自身的单位矢量

$$\hat{\boldsymbol{b}}=\frac{\boldsymbol{b}}{b}=\frac{4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}}{\sqrt{(4)^2+(-4)^2+(7)^2}}=\frac{4}{9}\boldsymbol{i}-\frac{4}{9}\boldsymbol{j}+\frac{7}{9}\boldsymbol{k}$$

$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影

$$\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{b}}=(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\cdot\left(\frac{4}{9}\boldsymbol{i}-\frac{4}{9}\boldsymbol{j}+\frac{7}{9}\boldsymbol{k}\right)$$

$$=(1)\left(\frac{4}{9}\right)+(-2)\left(-\frac{4}{9}\right)+(1)\left(\frac{7}{9}\right)=\frac{19}{9}$$

例 1.6 矢量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$ 和矢量 $\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 决定一平面，试求垂直于此平面的单位矢量。

解： 设垂直于 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 平面的矢量 $\boldsymbol{c}=c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k}$，则 $\boldsymbol{c}$ 既垂直于 $\boldsymbol{a}$ 又垂直于 $\boldsymbol{b}$，所以

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=2c_1-6c_2-3c_3=0$$

即 $$2c_1-6c_2=3c_3 \qquad (a)$$

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=4c_1+3c_2-c_3=0$$

即 $$4c_1+3c_2=c_3 \qquad (b)$$

联立解式(a)、(b)得 $c_1=\frac{1}{2}c_3, c_2=-\frac{1}{3}c_3$

$$\boldsymbol{c}=c_3\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{i}-\frac{1}{3}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\right)$$

于是 $\boldsymbol{c}$ 的单位矢量为

$$\hat{c}=\frac{c}{c}=\frac{c_3\left(\frac{1}{2}i-\frac{1}{3}j+k\right)}{\sqrt{c_3^2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+(1)^2\right]}}$$

$$=\pm\left(\frac{3}{7}i-\frac{2}{7}j+\frac{6}{7}k\right)$$

例 1.7 试证$\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i})\boldsymbol{i}+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j})\boldsymbol{j}+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}$,式中$\boldsymbol{a}$为一任意矢量。

证： 因为$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}=a_1\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_3\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=a_1$$

同理
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j}=a_2,\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}=a_3$$

于是
$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$$
$$=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i})\boldsymbol{i}+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j})\boldsymbol{j}+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}$$ （证毕）

§1.4 矢量的矢积

两矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的矢量积(简称矢积,又称叉积)是一矢量$\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{c}$的模是$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的模与两矢量夹角的正弦$\sin\theta$的乘积,$\boldsymbol{c}$垂直于$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$平面,且$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$构成右手系(图1.9)。表为

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \tag{1.24}$$

$$c=ab\sin\theta \tag{1.25}$$



图 1.9

由图1.9很容易看出,交换律对矢量的矢量积是不成立的,且

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} \tag{1.26}$$

若$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,或$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,因为$\sin\theta=0$,所以$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$。

由定义容易证明,笛卡尔直角坐标系单位矢量的矢积有如下关系

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0} \tag{1.27}$$

$$i \times j = -j \times i = k, j \times k = -k \times j = i,$$
$$k \times i = -i \times k = j \tag{1.28}$$

利用这些关系，可以求得

$$a \times b = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \times (b_1 i + b_2 j + b_3 k)$$
$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k$$

即
$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{1.29}$$

可以证明，分配律对矢量的矢量积是成立的，

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c \tag{1.30}$$

设 m 是纯量，有

$$m(a \times b) = (ma) \times b = a \times (mb) = (a \times b) m \tag{1.31}$$

例 1.8 设 a 既垂直于 b，又垂直于 c，试证 $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$

证： 因为 $a \perp b$，$a \times b$ 是一垂直于 a、b 平面的矢量，该矢量的模是 $ab\sin 90° = ab$，或 ab 的模，也就是说，这个矢量是 b 乘以 a，将 ab 转 90°，如图 1.10 所示。

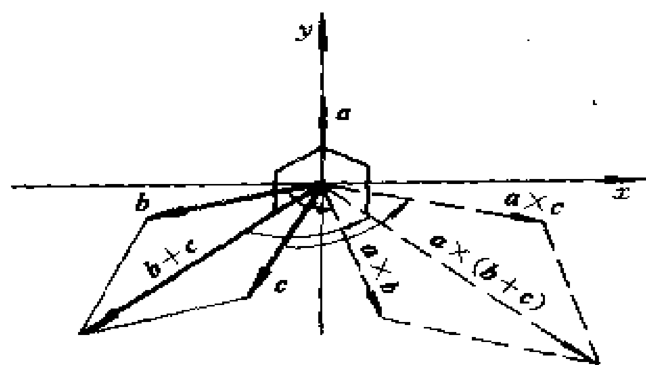


图 1.10

同理，$a \times c$ 是一垂直于 a、c 平面的矢量，这个矢量是 c 乘以 a，再转 90°至图 1.10 所示位置。

用同样的办法可推知，$a \times (b+c)$ 是矢量 $(b+c)$ 乘以 a，再转 90°至图 1.10 所示位置。

因为 $a \times (b+c)$ 是以 $a \times b$ 和 $a \times c$ 为邻边的平行四边形的对角线，所以有

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c \quad \text{（证毕）}$$

例 1.9 若 $a = 2i - 3j - k$，$b = i + 4j - 2k$，求(i)$a \times b$，(ii)$b \times$

$\boldsymbol{a}$,(iii)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$。

解：(i)方法一

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})\times(\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & -3 & -1\\ 1 & 4 & -2\end{vmatrix}$$

$$=10\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+11\boldsymbol{k}$$

方法二

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})\times(\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})\\&=2\boldsymbol{i}\times(\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})-3\boldsymbol{j}\times(\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})\\&\quad-\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})\\&=2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}-3\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}-12\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}\\&\quad+6\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}\\&=\boldsymbol{0}+8\boldsymbol{k}+4\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}-\boldsymbol{0}+6\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{i}+\boldsymbol{0}\\&=10\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+11\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}&=(\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})\times(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 4 & -2\\ 2 & -3 & -1\end{vmatrix}\\&=-10\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-11\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

与(i)的结果比较，验证了$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$。从两个行列式也易看出，行列式的两行调换后，行列式的值改变一次正负号。

(iii)方法一

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})+(\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})\\&=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}\\\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})-(\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})\\&=\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

于是 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=(3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})\times(\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$

$$=-20\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}-22\boldsymbol{k}$$

方法二

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) &= \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) \\
&= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b} \\
&= 0 - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + 0 \\
&= -2\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -2(10\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 11\boldsymbol{k}) \\
&= -20\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} - 22\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

例 1.10 矢量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 决定一平面，求垂直于该平面的单位矢量。

解： $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 所决定的平面。

$$
\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 15\boldsymbol{i} - 10\boldsymbol{j} + 30\boldsymbol{k}
$$

单位矢量平行于 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{c}} &= \frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|} \\
&= \frac{15\boldsymbol{i} - 10\boldsymbol{j} + 30\boldsymbol{k}}{\sqrt{(15)^2 + (-10)^2 + (30)^2}} \\
&= \frac{3}{7}\boldsymbol{i} - \frac{2}{7}\boldsymbol{j} + \frac{6}{7}\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

与此反向的另一单位矢量是 $-\frac{3}{7}\boldsymbol{i}+\frac{2}{7}\boldsymbol{j}-\frac{6}{7}\boldsymbol{k}$，与例 1.6 求得的结果一致。

§1.5 矢量的三重积

考察矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的混合乘法 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$，乘积是一纯量。由图 1.11 可以看出，这个纯量的绝对值等于由矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 所构成的平行六面体的体积。

$$
V = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} \tag{1.32}
$$

V 的正负号与矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的相互位置有关。若矢积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与矢量 $\boldsymbol{c}$ 构成锐角，则 $V>0$。此时三矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 是右手系（图 1.11）。反

之，若 $V<0$，三矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 是左手系。

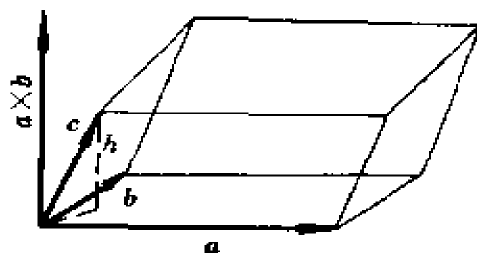


图 1.11

若循环置换矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的次序，即考察 $\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 矢量组，循环置换后不会改变原来的旋转方向，即原来是右手系的矢量组，循环置换后，仍然是右手系，且其乘积不变。

$$V=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \tag{1.33}$$

这一点很容易从行列式的性质得到证明。

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^{*} \tag{1.34}$$

行列式连续进行两次行的对调，不改变行列式的值和正负号。

若矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面，则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$，反之亦然。

下面考察
$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \tag{1.35}$$

由矢积的定义可知，$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 与 $\boldsymbol{d}$ 是共面的，亦即 $\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$ 三矢量共面，于是 $\boldsymbol{d}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$，因此，可以将矢量 $\boldsymbol{d}$ 分解为沿矢量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的分量，即

$$\boldsymbol{d}=\alpha\boldsymbol{b}+\beta\boldsymbol{c}$$

式中 α、β 是纯量。因为 $\boldsymbol{d}\perp\boldsymbol{a}$，故有

$$\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$$

$$\frac{\alpha}{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}}=-\frac{\beta}{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}=\lambda$$

即
$$\alpha=\lambda\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a},\quad\beta=-\lambda(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})$$

于是
$$\boldsymbol{d}=\lambda[\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})] \tag{1.36}$$

式(1.36)是一个恒等式，对任意的矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 皆成立。因此，λ

---

* 式(1.34)的证明见例 1.11。

是一个不变的常数。为了求出 λ 的值，令 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 在直角坐标系中的表达式为

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{j}$$

则
$$\boldsymbol{i} \times (\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}) = \lambda[\boldsymbol{i}(\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j}) - \boldsymbol{j}(\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i})]$$

所以
$$\lambda = 1$$

而与矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的选择无关。

最后得

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \tag{1.37}$$

结合律对于三重积不成立，即

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \neq (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) \tag{1.38}$$

证：
$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

用 $\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 代替式(1.37)中的 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$，即得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} &= -[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a})] \\ &= \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\end{aligned}$$

（证毕）

例 1.11 若 $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}$，试证

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

证：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) &= \boldsymbol{a} \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) \cdot [(b_2c_3 - b_3c_2)\boldsymbol{i} \\ &\quad + (b_3c_1 - b_1c_3)\boldsymbol{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\boldsymbol{k}] \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) \\ &\quad + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)\end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$
（证毕）

例 1.12 若 P、Q、R 三点不在一直线上，用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 分别表示这三点的位置矢量，试证矢量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$ 垂直于 P、Q、R 三点所决定的平面。

证： 设矢量 $\boldsymbol{r}$ 为 P、Q、R 三点所决定的平面内任一点的位置矢量，则矢量 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$ 共面。于是

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\cdot[(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})]=0$$

或
$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=0$$

所以矢量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$ 垂直于矢量 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}$，亦即垂直于 P、Q、R 三点所决定的平面。（证毕）

例 1.13 试证
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) &= \boldsymbol{b}[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})]-\boldsymbol{a}[\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})] \\ &= \boldsymbol{c}[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})]-\boldsymbol{d}[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]\end{aligned}$$

证： 由式(1.37)有

$$\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{d})-\boldsymbol{d}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{c})$$

令 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，则有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) &= \boldsymbol{c}[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{d}]-\boldsymbol{d}[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}] \\ &= \boldsymbol{c}[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})]-\boldsymbol{d}[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]\end{aligned}$$

根据式(1.38)有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{q}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{q})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{q})$$

令 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$，则

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\boldsymbol{b}[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})]-\boldsymbol{a}[\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})]$$

（证毕）

§ 1.6 对偶基矢量*

设有两组基矢量 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 和 $\boldsymbol{e}'_1$、$\boldsymbol{e}'_2$、$\boldsymbol{e}'_3$，若

$$\boldsymbol{e}'_1 = \frac{\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3}{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3},$$

$$\boldsymbol{e}'_2 = \frac{\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1}{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3},$$

$$\boldsymbol{e}'_3 = \frac{\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2}{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3} \tag{1.39}$$

式中 $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 \neq 0$，则

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}'_3 = 1 \tag{1.40}$$

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}'_1 = 0, \\
\boldsymbol{e}'_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}'_2 = 0, \\
\boldsymbol{e}'_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}'_3 = 0; \\
\boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}'_1 = 0, \\
\boldsymbol{e}'_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}'_2 = 0, \\
\boldsymbol{e}'_3 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}'_3 = 0
\end{aligned}\right\} \tag{1.41}$$

称矢量组 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 和 $\boldsymbol{e}'_1$、$\boldsymbol{e}'_2$、$\boldsymbol{e}'_3$ 为对偶基矢量。

证：

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 \cdot \frac{\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3}{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3} = \frac{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3}{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3} = 1$$

$$\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \frac{\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1}{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3} = \frac{\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1}{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3}$$

$$= \frac{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3}{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3} = 1$$

$$\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}_3 \cdot \frac{\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2}{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3} = \frac{\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2}{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3}$$

---

* 本节各除式中的分母均为纯量。两个矢量的比不等于矢量，而是四元数。矢量“除法”运算在一定意义上已超出了矢量代数的范围。

$$=\frac{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}=1$$

$$\boldsymbol{e}'_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}'_1=\frac{\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}$$

$$=\frac{\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3}{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}=0$$

同理可证 $\boldsymbol{e}'_1\cdot\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}'_1=0,\quad \boldsymbol{e}'_3\cdot\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}'_3=0,$

$\boldsymbol{e}'_3\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}'_3=0,\quad \boldsymbol{e}'_2\cdot\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}'_2=0,$

$\boldsymbol{e}'_2\cdot\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}'_2=0$ （证毕）

例 1.14 证明任一矢量 $\boldsymbol{r}$ 可以用对偶基矢量组 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 与 $\boldsymbol{e}'_1$、$\boldsymbol{e}'_2$、$\boldsymbol{e}'_3$ 写成下式

$$\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}'_1)\boldsymbol{e}_1+(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}'_2)\boldsymbol{e}_2+(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}'_3)\boldsymbol{e}_3$$

证： 矢量 $\boldsymbol{r}$ 可以在基矢 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 上分解

$$\boldsymbol{r}=r_1\boldsymbol{e}_1+r_2\boldsymbol{e}_2+r_3\boldsymbol{e}_3$$

两边点乘 $\boldsymbol{e}'_1$，注意到 $\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}'_1=\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}'_1=0,\quad \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}'_1=1,$

得 $$r_1=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}'_1$$

同理 $$r_2=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}'_2;\quad r_3=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}'_3$$

得 $$\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}'_1)\boldsymbol{e}_1+(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}'_2)\boldsymbol{e}_2+(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}'_3)\boldsymbol{e}_3$$ （证毕）

本章概要

1. 矢量 能用有向直线段表示的、且遵守平行四边形加法运算法则的物理量或几何量。

矢量的模 $|\boldsymbol{a}|=a$

2. 矢量加法的平行四边形法则

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

结合律 $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$

单位矢量：(i)沿坐标轴 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$；$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$

(ii)沿矢量本身 $\hat{\boldsymbol{a}}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{a}$

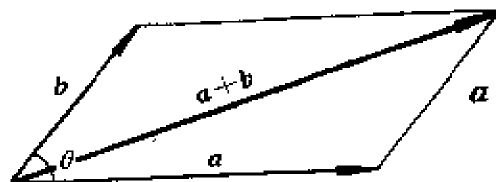


图 1.12

3. 矢量的纯量积

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=ab\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=a_b b=b_a a$$

$$=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$$

$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}$$

$$=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=0$$

交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

分配律 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$

4. 矢量的矢积

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

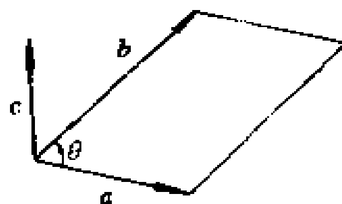


图 1.13

$$c=ab\sin\theta$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i},$$

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}$$

交换律不成立 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$

分配律成立 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$

5. 矢量的三重积

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$

6. 对偶基矢量

设有两组基矢量 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 和 $\boldsymbol{e}'_1$、$\boldsymbol{e}'_2$、$\boldsymbol{e}'_3$，

若

$$e'_1 = \frac{e_2 \times e_3}{e_1 \cdot e_2 \times e_3},$$

$$e'_2 = \frac{e_3 \times e_1}{e_1 \cdot e_2 \times e_3},$$

$$e'_3 = \frac{e_1 \times e_2}{e_1 \cdot e_2 \times e_3}$$

式中 $e_1 \cdot e_2 \times e_3 \neq 0$，则

$$e_1 \cdot e'_1 = e_2 \cdot e'_2 = e_3 \cdot e'_3 = 1$$

$$e'_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e'_1 = 0$$

$$e'_2 \cdot e_1 = e_1 \cdot e'_2 = 0$$

$$e'_3 \cdot e_1 = e_1 \cdot e'_3 = 0$$

$$e'_1 \cdot e_3 = e_3 \cdot e'_1 = 0$$

$$e'_2 \cdot e_3 = e_3 \cdot e'_2 = 0$$

$$e'_3 \cdot e_2 = e_2 \cdot e'_3 = 0$$

称矢量组 e_1、e_2、e_3 和 e'_1、e'_2、e'_3 为对偶基矢量。

习　　题

1.1　试证矢量加法符合结合律，即 $a+(b+c)=(a+b)+c$。

1.2　已知矢量 a、b，证明(i) $|a+b| \leqslant |a|+|b|$，(ii) $|a-b| \geqslant |a|-|b|$。

1.3　已知 a、b 是共面但不共线的两个矢量，在 a、b 所决定的平面内，写出任一矢量 r 的表达式。

1.4　已知不共面的三个矢量 a、b 和 c，求三维空间里任一矢量 r 的表达式。

1.5　试证平行四边形的对角线互相平分。

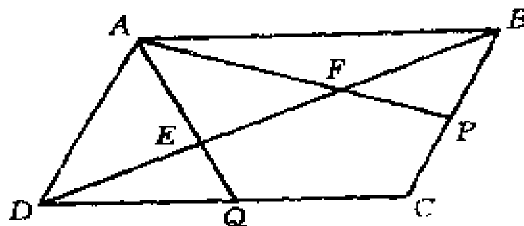
1.6　(i)若 O 是 $\triangle ABC$ 中的任意一点，P、Q、R 分别是三角形三条边 AB、BC、CA 的中点。证明 $OA+OB+OC=OP+OQ+OR$；(ii)若 O 点在三角形外，上述结论是否成立？并加以证明。

1.7　试证任意四边形中点的连线构成平行四边形。

1.8　P、Q 分别是平行四边形两邻边 BC、DC 的中点(如题图 1.8 所

示），试证 AP、AQ 等分对角线 DB。

1.9 设 P_1、P_2、P_3 是相对于原点 O 的三个固定点，它们的位矢分别为 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$。试证明：当且仅当 $a_1+a_2+a_3=0$，矢量方程 $a_1\boldsymbol{r}_1+a_2\boldsymbol{r}_2+a_3\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{o}$ 对原点 O 成立时，则这类矢量方程对于任何其他的原点 O' 也成立。



题 1.8 图

1.10 已知 P、Q 两点的位矢分别为 $\boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}_2=4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，试用 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 表示 $\overrightarrow{PQ}$，并求其大小。

1.11 A、B 两点相对于原点 O 的位矢分别为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，试求通过 A、B 的直线方程。

1.12 不共线的 A、B、C 三点相对于原点 O 的位矢分别为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$，试证通过这三点的平面方程是

$$\boldsymbol{r}=\frac{m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}+p\boldsymbol{c}}{m+n+p}$$

式中 m、n、p 是纯量。并证明方程与原点选择无关。

1.13 设 $\boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}_3=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{r}_4=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$，若 $\boldsymbol{r}_4=a\boldsymbol{r}_1+b\boldsymbol{r}_2+c\boldsymbol{r}_3$，求 a、b、c。

1.14 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求(i) $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$，(ii) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$，(iii) $|3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}|$，(iv)与 $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$ 平行的单位矢量。

1.15 已知纯量场 $\Phi(x,y,z)=3(x)^2z-x(y)^3+5$，试求下列各点的 Φ 值：(i)(0,0,0)，(ii)(1,−2,2)，(iii)(−1,−2,−3)。

1.16 已知纯量场 $\Phi(x,y,z)=4y(z)^3+3xyz+(z)^2+2$，求下列各点的 Φ 值：(i)(1,−1,−2)，(ii)(0,−3,1)。

1.17 作图描述下列矢量场：(i) $\boldsymbol{V}(x,y)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$，(ii) $\boldsymbol{V}(x,y)=-x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}$；(iii) $\boldsymbol{V}(x,y,z)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$。

1.18 作图描述下列矢量场：(i) $\boldsymbol{V}(x,y)=x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}$，(ii) $\boldsymbol{V}(x,y)=y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}$，(iii) $\boldsymbol{V}(x,y,z)=\dfrac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\sqrt{(x)^2+(y)^2+(z)^2}}$。

1.19　试证 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$。

1.20　试证 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}$。

1.21　若 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\alpha\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 垂直，试求 α 的值。

1.22　设 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，试求垂直于 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的单位矢量。

1.23　证明平面三角形的余弦定理。

1.24　设 $ABCD$ 是一平行四边形，试证 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$。

1.25　证明菱形的对角线互相垂直。

1.26　设 $ABCD$ 为一任意四边形，P、Q 分别是两对角线的中点，试证 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+4\,\overline{PQ}^2$。

1.27　试求与矢量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$ 垂直，并通过矢量 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 末端的平面方程。

1.28　设已知点 (x_1,y_1,z_1) 的位矢为 $\boldsymbol{a}$，任意点 (x,y,z) 的位矢为 $\boldsymbol{r}$，描述下列情况下 $\boldsymbol{r}$ 的轨迹：(i) $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|=3$，(ii) $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{a}=0$，(iii) $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{r}=0$。

1.29　求题 1.27 中坐标原点到所作平面的距离。

1.30　已知 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$ 分别为 P、Q 两点的位矢，试求 (i) 通过 Q 点并与 $\overline{PQ}$ 直线垂直的平面方程，(ii) 计算从 $(-1,1,1)$ 点到此平面的距离。

1.31　试证以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形面积是 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$。

1.32　设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，试求：(i) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，(ii) $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，(iii) $|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|$。

1.33　试证平面三角形的正弦定理。

1.34　设 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 是 xy 平面内与 x 轴的正向分别成 α、β 夹角的两个单位矢量，试证三角公式：(i) $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$，(ii) $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$。

1.35　设 $\boldsymbol{V}_1$、$\boldsymbol{V}_2$、$\boldsymbol{V}_3$、$\boldsymbol{V}_4$ 四矢量的模分别等于四面体四个表面 F_1、F_2、F_3、F_4 的面积，矢量的方向是这些表面向外的法线方向，试证 $\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2+\boldsymbol{V}_3+\boldsymbol{V}_4=\boldsymbol{O}$。

1.36　设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，试求：(i) $|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}|$，(ii) $|\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|$，(iii) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$，(iv) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$，(v) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$，(vi) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$。

1.37 试证 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$是以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为邻边的平行六面体体积的绝对值。

1.38 求对角线为 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ 的平行四边形的面积。

1.39 试证 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$。

1.40 试证 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$。

1.41 试证矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面的充分与必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=0$。

1.42 化简$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$。

1.43 试证$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$。

1.44 试证

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})(\hat{\boldsymbol{a}}\cdot\hat{\boldsymbol{b}}\times\hat{\boldsymbol{c}})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{a}} & \boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{b}} & \boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{c}}\\ \boldsymbol{b}\cdot\hat{\boldsymbol{a}} & \boldsymbol{b}\cdot\hat{\boldsymbol{b}} & \boldsymbol{b}\cdot\hat{\boldsymbol{c}}\\ \boldsymbol{c}\cdot\hat{\boldsymbol{a}} & \boldsymbol{c}\cdot\hat{\boldsymbol{b}} & \boldsymbol{c}\cdot\hat{\boldsymbol{c}}\end{vmatrix}。$$

1.45 试证 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0$。

1.46 试证 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 的充分与必要条件是$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}=0$，并讨论 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 或 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$ 的情况。

1.47 试证球面三角形的正弦定理。

1.48 试证球面三角形的余弦定理。

1.49 试证$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^2$。

1.50 求矢量组 $2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 的对偶矢量组。

1.51 已知 $\boldsymbol{e}'_1=\dfrac{\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}$，$\boldsymbol{e}'_2=\dfrac{\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1}{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}$，$\boldsymbol{e}'_3=\dfrac{\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2}{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}$，若 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3\neq0$，试证：(i)若 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=V$，则 $\boldsymbol{e}'_1\cdot\boldsymbol{e}'_2\times\boldsymbol{e}'_3=1/V$；(ii)若 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 不共面，则 $\boldsymbol{e}'_1$、$\boldsymbol{e}'_2$、$\boldsymbol{e}'_3$ 也不共面。

1.52 若 $\boldsymbol{e}'_1=\dfrac{\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}$，$\boldsymbol{e}'_2=\dfrac{\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1}{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}$，$\boldsymbol{e}'_3=\dfrac{\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2}{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}$，试证：$\boldsymbol{e}_1=\dfrac{\boldsymbol{e}'_2\times\boldsymbol{e}'_3}{\boldsymbol{e}'_1\cdot\boldsymbol{e}'_2\times\boldsymbol{e}'_3}$，$\boldsymbol{e}_2=\dfrac{\boldsymbol{e}'_3\times\boldsymbol{e}'_1}{\boldsymbol{e}'_1\cdot\boldsymbol{e}'_2\times\boldsymbol{e}'_3}$，$\boldsymbol{e}_3=\dfrac{\boldsymbol{e}'_1\times\boldsymbol{e}'_2}{\boldsymbol{e}'_1\cdot\boldsymbol{e}'_2\times\boldsymbol{e}'_3}$。

第二章　矢量分析

§2.1　纯量自变量的矢函数

1.　矢函数及其极限和连续性

(1)纯量自变量的矢函数定义

定义：设有纯量变量 t 和变矢量 $\boldsymbol{a}$，如果对于在某一范围内 t 的每个值，$\boldsymbol{a}$ 都有一确定的矢量与之对应，则称 $\boldsymbol{a}$ 为纯量(自)变量 t 的矢函数，记作

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t) \tag{2.1}$$

矢量 $\boldsymbol{a}$ 在 $oxyz$ 正交坐标系中可写为

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \tag{2.2}$$

式中 a_x、a_y、a_z 是矢量 $\boldsymbol{a}$ 沿三个坐标轴的分量，或在三个坐标轴上的投影。

以矢量 $\boldsymbol{a}(t)$ 的始点 O 作为坐标原点，当 t 变化时，$\boldsymbol{a}(t)$ 的终点 P 就在空间描绘出一条曲线 l(图 2.1)。这样的曲线称为矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$ 的矢端曲线。式(2.1)或式(2.2)则是此曲线的矢量方程。

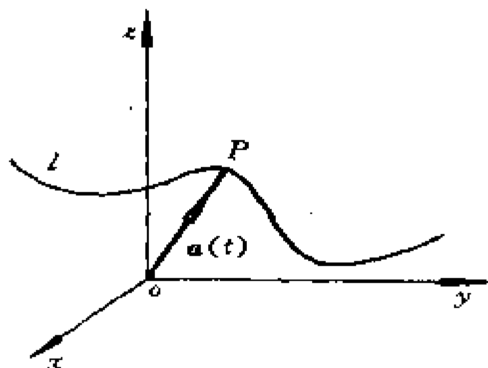


图　2.1

由于我们把 $\boldsymbol{a}(t)$ 的始点取作坐标原点，所以 $\boldsymbol{a}(t)$ 实际上就成为其终点 P 的矢径。矢径的三个坐标分量 $a_x(t)$、$a_y(t)$、$a_z(t)$ 正好对应地等于它的终点 P 的三个坐

标 x,y,z，即

$$x = a_x(t), y = a_y(t), z = a_z(t) \tag{2.3}$$

这就是曲线 l 以 t 为参变量的参数方程。

(2)矢函数的极限

定义：设矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$ 在点 t_0 的某个邻域内有定义，$\boldsymbol{a}_0$ 为一常矢，如果对于任意给定的正数 ε，都存在一个正数 δ，使得当 t 满足 $0<|t-t_0|<\delta$ 时，有

$$|\boldsymbol{a}(t) - \boldsymbol{a}_0| < \varepsilon$$

成立，则称当 $t\to t_0$ 时矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$ 有极限 $\boldsymbol{a}_0$，记作

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{a}_0 \tag{2.4}$$

这个定义与纯量函数的极限定义完全类似。因此，矢函数有类似于纯量函数中的一些极限运算法则，如

$$\lim_{t\to t_0}u(t)\boldsymbol{a}(t) = \lim_{t\to t_0}u(t)\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t) \tag{2.5}$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{a}(t) \pm \boldsymbol{b}(t)] = \lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t) \pm \lim_{t\to t_0}\boldsymbol{b}(t) \tag{2.6}$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{b}(t)] = \lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t) \cdot \lim_{t\to t_0}\boldsymbol{b}(t) \tag{2.7}$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{a}(t) \times \boldsymbol{b}(t)] = \lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t) \times \lim_{t\to t_0}\boldsymbol{b}(t) \tag{2.8}$$

其中 $u(t)$ 为纯量函数，$\boldsymbol{a}(t)$、$\boldsymbol{b}(t)$ 是矢函数，且当 $t\to t_0$ 时，$u(t)$、$\boldsymbol{a}(t)$、$\boldsymbol{b}(t)$ 的极限都存在。

设 $$\boldsymbol{a}(t)=a_x(t)\boldsymbol{i}+a_y(t)\boldsymbol{j}+a_z(t)\boldsymbol{k}$$

则有 $$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t) = \lim_{t\to t_0}a_x(t)\boldsymbol{i} + \lim_{t\to t_0}a_y(t)\boldsymbol{j} + \lim_{t\to t_0}a_z(t)\boldsymbol{k} \tag{2.9}$$

(3)矢函数的连续性

定义：若矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$ 在点 t_0 的某个邻域内有定义，而且有

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{a}_0 \tag{2.10}$$

则称 $\boldsymbol{a}(t)$ 在 $t=t_0$ 处连续。

若矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$ 在某区间内的每一点处都连续，则称 $\boldsymbol{a}(t)$ 在该区间内连续。

§ 2.2　矢函数的微分法

1.　矢函数的导数

定义：设矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$ 在点 t 处的增量 $\Delta\boldsymbol{a}$ 与对应的 Δt 之比

$$\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{a}(t+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t)}{\Delta t}$$

在 $\Delta t\to 0$ 时，其极限存在，则称此极限为矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$ 在点 t 处的导数，记作

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{a}(t+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t)}{\Delta t}\tag{2.11}$$

若 $\boldsymbol{a}(t)$ 写成分量形式

$$\boldsymbol{a}(t)=a_x(t)\boldsymbol{i}+a_y(t)\boldsymbol{j}+a_z(t)\boldsymbol{k}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}a_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}a_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}a_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\tag{2.12}$$

同样可定义高阶导数。

下面证明：导数 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$ 是一矢量，其方向沿函数 $\boldsymbol{a}(t)$ 矢端图的切线。

考察比例式 $\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}$。这个比例式是一矢量，其方向沿函数 $\boldsymbol{a}(t)$ 矢端曲线的割线 PP_1（图 2.2）。当 Δt 趋近于零时，点 P_1 趋近于点 P，割线则趋近于点 P 的切线。因此，矢量 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$ 的方向，是沿矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$ 的矢端曲线上相应点的切线。

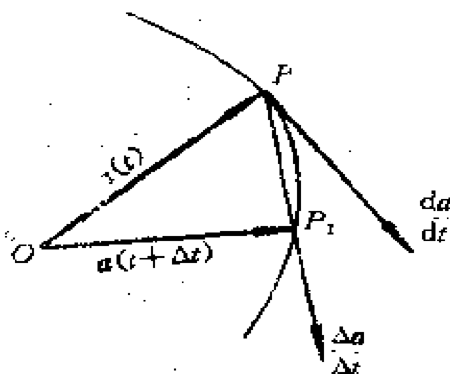


图　2.2

2.　矢函数的导数公式

若 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 是纯量 t 的可导矢函数，ϕ 是 t 的可导纯量函数，则

有

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{(i)} && \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}(\boldsymbol{c}\text{ 为常矢})\\
&\text{(ii)} && \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\pm\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}\\
&\text{(iii)} && \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{b}\\
&\text{(iv)} && \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{b}\\
&\text{(v)} && \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi\boldsymbol{a})=\phi\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{a}\\
&\text{(vi)} && \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{c}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{c}\\
& && \qquad+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\\
&\text{(vii)} && \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]=\boldsymbol{a}\times\left(\boldsymbol{b}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{c}}{\mathrm{d}t}\right)+\boldsymbol{a}\times\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{c}\right)\\
& && \qquad+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})
\end{aligned}\right\}
\tag{2.13}
$$

上述各式中的相乘次序很重要。这些公式的证明方法，与微积分学中纯量函数的类似公式的证明方法完全相同。

3. 矢函数的偏导数

若 $\boldsymbol{a}$ 是几个纯量的矢函数，譬如是 x、y、z 的矢函数，则写成 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(x,y,z)$。如果下列极限存在，则 $\boldsymbol{a}$ 相对于 x 的偏导数定义为

$$
\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\boldsymbol{a}(x+\Delta x,y,z)-\boldsymbol{a}(x,y,z)}{\Delta x}
$$

同理，

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial y}&=\lim_{\Delta y\to0}\frac{\boldsymbol{a}(x,y+\Delta y,z)-\boldsymbol{a}(x,y,z)}{\Delta y}\\
\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial z}&=\lim_{\Delta z\to0}\frac{\boldsymbol{a}(x,y,z+\Delta z)-\boldsymbol{a}(x,y,z)}{\Delta z}
\end{aligned}\right\}
\tag{2.14}
$$

单变量矢函数的连续和可导性的表述，可以推广到两个或多个纯量变量的矢函数。例如，如果$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\boldsymbol{a}(x+\Delta x,y+\Delta y)=\boldsymbol{a}(x,y)$，或者如果对于每个正数$\epsilon$，我们都能找到正数$\delta$，使得$|\Delta x|<\delta$和$|\Delta y|<\delta$时，有$|\boldsymbol{a}(x+\Delta x,y+\Delta y)-\boldsymbol{a}(x,y)|<\epsilon$，则称$\boldsymbol{a}(x,y)$是连续的。

高阶偏导数可定义为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x}\right),\frac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial y}\right),\\&\frac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial z}\right);\\&\frac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial y}\right),\frac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x}\right);\\&\cdots\end{aligned}\right\}\tag{2.15}$$

如果$\boldsymbol{a}$有二阶或更高阶连续可导性，则$\dfrac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial y\partial x}$等与求导的次序无关。

类似地有下列导数公式

$$\left.\begin{aligned}&\text{(i)}\quad\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{b}}{\partial x}+\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x}\cdot\boldsymbol{b}\\&\text{(ii)}\quad\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\frac{\partial\boldsymbol{b}}{\partial x}+\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x}\times\boldsymbol{b}\\&\text{(iii)}\quad\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{b}}{\partial y\partial x}+\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial y}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{b}}{\partial x}\\&\qquad\qquad+\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{b}}{\partial y}+\frac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial y\partial x}\cdot\boldsymbol{b}\end{aligned}\right\}\tag{2.16}$$

§2.3 矢函数的微分



由图2.2可知，$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$是一矢量，称$\mathrm{d}\boldsymbol{a}$是矢函数$\boldsymbol{a}$在点$t$的微分。显然，$\mathrm{d}\boldsymbol{a}$的方向也是沿矢函数$\boldsymbol{a}(t)$的矢端曲线上点$t$的切线。

将微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 写成沿坐标轴的分量形式

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \mathrm{d}a_x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}a_y\boldsymbol{j} + \mathrm{d}a_z\boldsymbol{k}$$

于是有
$$|\mathrm{d}\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\mathrm{d}a_x)^2 + (\mathrm{d}a_y)^2 + (\mathrm{d}a_z)^2} \tag{2.17}$$

对于矢径函数

$$\boldsymbol{r} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

其模
$$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2} \tag{2.18}$$

若在规定了正向的曲线 l 上，取定一点作为计算弧长 s 的起点，并将 l 的正向取作 s 增大的方向，这样，在 l 上任一点处，弧长的微分

$$\mathrm{d}s = \pm\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2} \tag{2.19}$$

可见
$$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = |\mathrm{d}s| \tag{2.20}$$

即，矢径函数的微分的模等于其矢端曲线的弧长微分的绝对值，从而有

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right| = \frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{|\mathrm{d}s|} = 1 \tag{2.21}$$

这说明，矢径函数对（其矢端曲线的）弧长 s 的导数 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$ 为一单位矢量。

例 2.1 试证 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{c}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{c}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，式中 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 是纯量 t 的可导函数。

证：由式（2.13）中的（iii）和（iv）式有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) &= \boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\\ &= \boldsymbol{a}\cdot\left[\boldsymbol{b}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{c}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{c}\right] + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\\ &= \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{c}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{c} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

（证毕）

例 2.2 设 $\boldsymbol{a}=5t^2\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}-t^3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\sin t\boldsymbol{i}-\cos t\boldsymbol{j}$，求（i）$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，

(ii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$，(iii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})$。

解：方法一

(i)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{b}$$
$$=(5t^2\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}-t^3\boldsymbol{k})\cdot(\cos t\boldsymbol{i}+\sin t\boldsymbol{j})$$
$$+(10t\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3t^2\boldsymbol{k})\cdot(\sin t\boldsymbol{i}-\cos t\boldsymbol{j})$$
$$=5t^2\cos t+t\sin t+10t\sin t-\cos t$$
$$=(5t^2-1)\cos t+11t\sin t$$

(ii)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{b}$$
$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 5t^2 & t & -t^3\\ \cos t & \sin t & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 10t & 1 & -3t^2\\ \sin t & -\cos t & 0\end{vmatrix}$$
$$=[t^3\sin t\boldsymbol{i}-t^3\cos t\boldsymbol{j}+(5t^2\sin t-t\cos t)\boldsymbol{k}]$$
$$+[-3t^2\cos t\boldsymbol{i}-3t^2\sin t\boldsymbol{j}$$
$$+(-10t\cos t-\sin t)\boldsymbol{k}]$$
$$=(t^3\sin t-3t^3\cos t)\boldsymbol{i}-(t^3\cos t+3t^2\sin t)\boldsymbol{j}$$
$$+(5t^2\sin t-\sin t-11t\cos t)\boldsymbol{k}$$

(iii)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{a}$$
$$=2\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$$
$$=2(5t^2\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}-t^3\boldsymbol{k})\cdot(10t\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3t^2\boldsymbol{k})$$
$$=100t^3+2t+6t^5$$

方法二

(i) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=5t^2\sin t-t\cos t$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(5t^2\sin t-t\cos t)$$

$$=5t^2\cos t + 10t\sin t + t\sin t - \cos t$$

$$=(5t^2-1)\cos t + 11t\sin t$$

(ii) $$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5t^2 & t & -t^3 \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-t^3\cos t\boldsymbol{i}-t^3\sin t\boldsymbol{j}+(-5t^2\cos t-t\sin t)\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(t^3\sin t-3t^2\cos t)\boldsymbol{i}-(t^3\cos t+3t^2\sin t)\boldsymbol{j}$$

$$+(5t^2\sin t-\sin t-11t\cos t)\boldsymbol{k}$$

(iii) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=(5t^2)^2+(t)^2+(-t^3)^2=25t^4+t^2+t^6$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(25t^4+t^2+t^6)=100t^3+2t+6t^5$$

例 2.3 求曲线 $x=t^2+1, y=4t-3, z=2t^2-6t$ 上任一点的单位切矢量。

解：曲线上任一点的切矢量

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(t^2+1)\boldsymbol{i}+(4t-3)\boldsymbol{j}+(2t^2-6t)\boldsymbol{k}]$$

$$=2t\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+(4t-6)\boldsymbol{k}$$

切矢量的模

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\sqrt{(2t)^2+(4)^2+(4t-6)^2}$$

单位切矢量

$$\hat{\boldsymbol{T}}=\frac{2t\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+(4t-6)\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2t)^2+(4)^2+(4t-6)^2}}$$

注意到 $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}, \hat{\boldsymbol{T}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$

例 2.4 若 $\boldsymbol{a}=(2x^2y-x^4)\boldsymbol{i}+(e^{xy}-y\sin x)\boldsymbol{j}+(x^2\cos y)\boldsymbol{k}$，求 (i) $\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x}$，(ii) $\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial y}$，(iii) $\frac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial x\partial y}\left(\text{或}\frac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial y\partial x}\right)$。

解：
$$\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(2x^2y-x^4)\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial x}(e^{xy}-y\sin x)\boldsymbol{j}$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}(x^2\cos y)\boldsymbol{k}$$

$$=(4xy-4x^3)\boldsymbol{i}+(ye^{xy}-y\cos x)\boldsymbol{j}+2x\cos y\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2x^2y-x^4)\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}(e^{xy}-y\sin x)\boldsymbol{j}$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}(x^2\cos y)\boldsymbol{k}$$

$$=2x^2\boldsymbol{i}+(xe^{xy}-\sin x)\boldsymbol{j}-x^2\sin y\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(2x^2)\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy}-\sin x)\boldsymbol{j}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(x^2\sin y)\boldsymbol{k}$$

$$=4x\boldsymbol{i}+(xye^{xy}+e^{xy}-\cos x)\boldsymbol{j}-2x\sin y\boldsymbol{k}$$

§2.4 矢函数的积分

1. 矢函数的不定积分

矢函数的积分运算与纯量函数的积分运算类似。设

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{b}(t) \tag{2.22}$$

那么

$$\boldsymbol{a}=\int \boldsymbol{b}(t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{c} \tag{2.23}$$

式中 $\boldsymbol{c}$ 是任意常矢量。

纯量函数不定积分的基本性质对于矢函数仍然成立，例如

$$\int u\boldsymbol{a}(t)\mathrm{d}t=u\int \boldsymbol{a}(t)\mathrm{d}t \quad (u\text{ 为常数}) \tag{2.24}$$

$$\int \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{a}\cdot\int \boldsymbol{b}(t)\mathrm{d}t \quad (\boldsymbol{a}\text{ 为常矢}) \tag{2.25}$$

$$\int[\boldsymbol{a}(t)\pm\boldsymbol{b}(t)]\mathrm{d}t=\int \boldsymbol{a}(t)\mathrm{d}t\pm\int \boldsymbol{b}(t)\mathrm{d}t \tag{2.26}$$

2. 矢函数的定积分

设矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$ 在区间 $[T_1,T_2]$ 上连续，则 $\boldsymbol{a}(t)$ 在 $[T_1,T_2]$ 上的

定积分为

$$\int_{T_1}^{T_2} \boldsymbol{a}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{b}(T_2) - \boldsymbol{b}(T_1) \tag{2.27}$$

根据式(2.13)、(2.22)和式(2.23)，可以得到类似于纯量函数积分运算中的一些关系式。例如，可以得到"分部积分"的一些公式：

$$\left.\begin{aligned}
&\int m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = m\boldsymbol{a} - \int \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{a}\mathrm{d}t \\
&\int \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{a}\mathrm{d}t = m\boldsymbol{a} - \int m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\
&\int \boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{b}\mathrm{d}t \\
&\int \boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} - \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{b}\mathrm{d}t
\end{aligned}\right\} \tag{2.28}$$

式中 m 是纯量函数，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是矢函数。

例 2.5 求下列积分，(i) $\int \boldsymbol{a}(t)\mathrm{d}t$，(ii) $\int_1^2 \boldsymbol{a}(t)\mathrm{d}t$，其中 $\boldsymbol{a}(t) = (2+4t)\boldsymbol{i} - 6t^2\boldsymbol{j} + 8t^3\boldsymbol{k}$。

解：

$$\text{(i)} \int \boldsymbol{a}(t)\mathrm{d}t = \int [(2+4t)\boldsymbol{i} + 6t^2\boldsymbol{j} + 8t^3\boldsymbol{k}]\mathrm{d}t$$

$$= (2t+2t^2+c_1)\boldsymbol{i} + (2t^3-c_2)\boldsymbol{j} + (2t^4+c_3)\boldsymbol{k}$$

其中 c_1、c_2、c_3 为任意常数。

$$\text{(ii)} \int_1^2 \boldsymbol{a}(t)\mathrm{d}t = [(2t+2t^2)\boldsymbol{i} + 2t^3\boldsymbol{j} + 2t^4\boldsymbol{k}]_1^2$$

$$= 8\boldsymbol{i} + 14\boldsymbol{j} + 30\boldsymbol{k}$$

例 2.6 若质点的位矢为 $\boldsymbol{r}(t)$，则其速度 $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，加速度 $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$。当质点的加速度为

$$\boldsymbol{a} = (6\cos t)\boldsymbol{i} + (4\sin t)\boldsymbol{j} + e^{-t}\boldsymbol{k}$$

时，求 $\boldsymbol{r}(t)$ 与 $\boldsymbol{v}(t)$。其中 $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{0}$。

解：$\boldsymbol{v}=\int \boldsymbol{a}\mathrm{d}t=\left(\int 6\cos t\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{i}+\left(\int 4\sin t\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{j}+\left(\int e^{-t}\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{k}$

$$=(6\sin t+c_1)\boldsymbol{i}+(-4\cos t+c_2)\boldsymbol{j}+(-e^{-t}+c_3)\boldsymbol{k}$$

由于 $\boldsymbol{v}(0)=\boldsymbol{0}$，因而 $c_1=0,c_2=4,c_3=1$，即

$$\boldsymbol{v}=(6\sin t)\boldsymbol{i}+(-4\cos t+4)\boldsymbol{j}+(-e^{-t}+1)\boldsymbol{k}$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(t)&=\int \boldsymbol{v}(t)\mathrm{d}t\\&=\left(\int 6\sin t\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{i}+\left(\int(-4\cos t+4)\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{j}\\&\quad+\left(\int(-e^{-t}+1)\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{k}\\&=(-6\cos t+c_1)\boldsymbol{i}+(-4\sin t+4t+c_2)\boldsymbol{j}\\&\quad+(e^{-t}+t+c_3)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{r}(0)=\boldsymbol{0}$，因而 $c_1=6,c_2=0,c_3=-1$，

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(t)&=(-6\cos t+6)\boldsymbol{i}+(-4\sin t+4t)\boldsymbol{j}\\&\quad+(e^{-t}+t-1)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

§2.5 纯量场的梯度

1. 纯量场及其等值面

如果空间里的每一点，都对应着某个物理量的一个确定的值，则称在此空间里存在着该物理量的场。如果物理量是纯数量，则称这个场是纯量场。例如温度场、密度场等都是纯量场。如果物理量是矢量，则称这个场是矢量场。例如力场、速度场等是矢量场。

在纯量场中，当选定了坐标系 $oxyz$ 后，各点处的物理量可表为

$$\Phi=\Phi(x,y,z)$$

即一个纯量场，可以用一个单值连续函数表示，我们假定这函数具有一阶连续偏导数。

纯量场中具有相同数值物理量的各点所构成的曲面，称为等值面，等值面方程是

$$\Phi(x,y,z) = C \qquad (C\text{ 为常数}) \tag{2.29}$$

在二维空间里，$\Phi(x,y)=C$ 则表示等值线。

2. 纯量场的梯度与方向导数

为了解纯量场中纯量 Φ 的变化情况，需要研究纯量场的梯度与方向导数。

下面考察纯量 Φ 在场中各点处的邻域内沿某一方向的变化情况。

若在纯量场 $\Phi(P)$ 中的一点 P 处，存在这样的矢量 $\boldsymbol{G}$，其方向为函数 $\Phi(P)$ 在 P 点处变化率最大的方向，其模是这个最大变化率的数值，则称矢量 $\boldsymbol{G}$ 为函数 $\Phi(P)$ 在点 P 处的梯度，记作 $\text{grad}\Phi$，即

$$\text{grad}\Phi = \boldsymbol{G} \tag{2.30}$$

在直角坐标系 $(oxyz)$ 里，设点 P 的坐标为 $P(x,y,z)$，对于定义在空间某区域上的纯量场 Φ，点 P 处的梯度为

$$\text{grad}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{2.31}$$

为方便起见，引入哈密顿算子

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2.32}$$

于是

$$\text{grad}\Phi = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi = \nabla\Phi \tag{2.33}$$

∇是一个微分运算符号，同时又应当作矢量看待，这一点在下面讨论矢量场的散度与旋度时更为重要。

纯量场中函数 Φ 在某点 P 的梯度 $\text{grad}\Phi$ 是一个矢量，其方向是函数 Φ 变化最快的方向，其大小是 Φ 沿该方向的变化率，即函数 Φ 的最大变化率。下面讨论沿任意给定方向，函数 Φ 的变化率。

点 P 与单位矢量 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 给定时，过 P 点沿 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 的方向作直线 l（图

2.3)。在 l 上取与 P 点邻近的一点 Q，令 $\overline{PQ}=S$，当 $Q\rightarrow P$ 时，比例式

$$\frac{\Delta\Phi}{S}=\frac{\Phi(Q)-\Phi(P)}{\overline{PQ}}$$

的极限存在，则称上式的极限为函数 $\Phi(P)$ 在点 P 处沿 $\hat{a}$ 的方向导数，记作

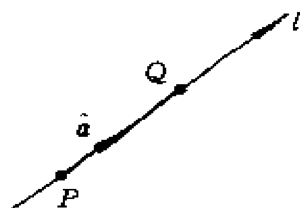


图 2.3

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}S}=\lim_{Q\rightarrow P}\frac{\Phi(Q)-\Phi(P)}{\overline{PQ}}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}S}&=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S}\Phi(x(S),y(S),z(S))\right]_{S=0}\\&=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}S}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}S}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}S}\\&=\mathrm{grad}\Phi\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}S}=\boldsymbol{G}\cdot\hat{\boldsymbol{a}}\end{aligned}\tag{2.34}$$

上式表明，梯度 $\boldsymbol{G}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影正好等于函数 Φ 在该方向上的方向导数。

如果 Φ 的梯度矢量 $\mathrm{grad}\Phi$ 与单位矢量 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 的夹角为 θ，则 $\mathrm{grad}\Phi\cdot\hat{\boldsymbol{a}}=|\mathrm{grad}\Phi|\cos\theta$，由此可见，$|\mathrm{grad}\Phi|$ 显然是 Φ 变化率的最大值。

例 2.7 对于纯量场 $\Phi(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2+2xy$，求 $\Phi(x,y,z)$ 的梯度以及在点(1,2,1)处、沿 $\hat{\boldsymbol{a}}=\frac{1}{3}\boldsymbol{i}+\frac{2}{3}\boldsymbol{j}+\frac{2}{3}\boldsymbol{k}$ 方向上 Φ 的方向导数。

解：

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\Phi=\nabla\Phi&=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{k}\\&=(2x+2y)\boldsymbol{i}+(2y+2x)\boldsymbol{j}+4z\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

在点(1,2,1)处

$$\nabla\Phi=6\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$$

于是方向导数

$$\nabla \Phi \cdot \hat{a} = \frac{1}{3}[(6)(1) + (6)(2) + (4)(2)] = \frac{26}{3}$$

例 2.8 试证(i)$\nabla(F+G)=\nabla F+\nabla G$，(ii)$\nabla(FG)=F\nabla G+G\nabla F$。式中 F 和 G 均为 x,y,z 的可导纯量函数。

证：

(i)
$$\begin{aligned}\nabla(F+G) &= \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(F+G)\\
&= \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}(F+G)+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}(F+G)+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}(F+G)\\
&= \boldsymbol{i}\frac{\partial F}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial F}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial F}{\partial z}\\
&\quad +\boldsymbol{i}\frac{\partial G}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial G}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial G}{\partial z}\\
&= \nabla F+\nabla G\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}\nabla(FG) &= \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}-\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(FG)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}(FG)\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}(FG)\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}(FG)\boldsymbol{k}\\
&= \left(F\frac{\partial G}{\partial x}+G\frac{\partial F}{\partial x}\right)\boldsymbol{i}-\left(F\frac{\partial G}{\partial y}+G\frac{\partial F}{\partial y}\right)\boldsymbol{j}\\
&\quad +\left(F\frac{\partial G}{\partial z}+G\frac{\partial F}{\partial z}\right)\boldsymbol{k}\\
&= F\left(\frac{\partial G}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial G}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial G}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\\
&\quad +G\left(\frac{\partial F}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial F}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\\
&= F\nabla G+G\nabla F\end{aligned}$$

（证毕）

§ 2.6 矢量场的散度

设 $\boldsymbol{a}$ 为定义在空间某区域上的矢量场，在直角坐标系中 $\boldsymbol{a}=[a_x(x,y,z),a_y(x,y,z),a_z(x,y,z)]$，在任一点 $P(x,y,z)$处的散度定义为

$$\text{div}\boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{2.35}$$

纯量场 div$\boldsymbol{a}$ 又可写成$\nabla \cdot \boldsymbol{a}$。

$$\begin{aligned}
\text{div}\boldsymbol{a} &= \nabla \cdot \boldsymbol{a} \\
&= \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) \\
&= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

对于纯量场 Φ

$$\begin{aligned}
\text{div}(\text{grad}\Phi) &= \nabla \cdot \nabla \Phi \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) \\
&= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

上式右端称为纯量场 Φ 的拉普拉斯(Laplace)算符，用$\nabla\Phi$ 或 $\Delta\Phi$ 表示，算子

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.38}$$

叫做拉普拉斯算子。偏微分方程

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{2.39}$$

叫做拉普拉斯方程。满足拉普拉斯方程的函数叫做调和函数。

例 2.9 设矢量场 $\boldsymbol{a} = x^2z\boldsymbol{i} - 2y^3z^2\boldsymbol{j} + xy^2z\boldsymbol{k}$，求点 $P(1,-1,1)$处的散度。

解：

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{a} &= \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&\quad \cdot (x^2z\boldsymbol{i} - 2y^3z^2\boldsymbol{j} + xy^2z\boldsymbol{k}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(x^2z) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y^3z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xy^2z) \\
&= 2xz - 6y^2z^2 + xy^2
\end{aligned}$$

在点 $P(1,-1,1)$处

$$\nabla \cdot \boldsymbol{a}|_P = 2(1)(1) - 6(-1)^2(1)^2 + (1)(-1)^2 = -3$$

例 2.10 试证$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=0$

证： $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$$

$$=-x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2+z^2}}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left[-x(x^2-y^2+z^2)^{-3/2}\right]$$

$$=3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}-(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$=\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\frac{2y^2-z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\frac{2z^2-y^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

三式相加得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=0 \qquad \text{（证毕）}$$

可见所证的是拉普拉斯方程，$\phi=\frac{1}{r}$就是这个方程的解。

例 2.11 对于常矢量 $\boldsymbol{a}$，试证 $\mathrm{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=0$

证： 设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}=(a_yz-a_zy)\boldsymbol{i}+(a_zx-a_xz)\boldsymbol{j}$$
$$+(a_xy-a_yx)\boldsymbol{k}$$

从而 $$\mathrm{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=\frac{\partial}{\partial x}(a_yz-a_zy)+\frac{\partial}{\partial y}(a_zx-a_xz)$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}(a_xy-a_yx)=0$$

§2.7 矢量场的旋度

设坐标系$(oxyz)$为右手系的正交坐标系，对于矢量场 $\boldsymbol{a}(x,y,z)=a_x(x,y,z)\boldsymbol{i}+a_y(x,y,z)\boldsymbol{j}+a_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$，

由 $$\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \tag{2.40}$$

所定义的矢量场叫做 $\boldsymbol{a}$ 的旋度，记作 $\mathrm{curl}\boldsymbol{a}$。式(2.40)可写成$\nabla\times\boldsymbol{a}$，即

$$\nabla\times\boldsymbol{a}=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix} \tag{2.41}$$

例 2.12 设 $\boldsymbol{a}=xz^3\boldsymbol{i}-2x^2yz\boldsymbol{j}+2yz^4\boldsymbol{k}$，求点 $P(1,-1,1)$处的旋度 $\mathrm{curl}\boldsymbol{a}$。

解：$\mathrm{curl}\boldsymbol{a}=\nabla\times\boldsymbol{a}$

$$=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(xz^3\boldsymbol{i}-2x^2yz\boldsymbol{j}+2yz^4\boldsymbol{k})$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xz^3 & -2x^2yz & 2yz^4\end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial y}(2yz^4)-\frac{\partial}{\partial z}(-2x^2yz)\right]\boldsymbol{i}$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial z}(xz^3)-\frac{\partial}{\partial x}(2yz^4)\right]\boldsymbol{j}$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial x}(-2x^2yz)-\frac{\partial}{\partial y}(xz^3)\right]\boldsymbol{k}$$

$$=(2z^4+2x^2y)\boldsymbol{i}+3xz^2\boldsymbol{j}-4xyz\boldsymbol{k}$$

$=3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$(在点 $P(1,-1,1)$处)

§2.8 关于梯度、散度、旋度的公式

设 F、G 为纯量场，A、B 为矢量场，并设它们连续且存在二阶偏导数。

$$\mathrm{grad}(F+G)=\nabla(F+G)=\nabla F+\nabla G \tag{2.42}$$

$$\mathrm{grad}(FG)=\nabla(FG)=G\nabla F+F\nabla G \tag{2.43}$$

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\cdot\boldsymbol{a}+\nabla\cdot\boldsymbol{b} \tag{2.44}$$

$$\mathrm{curl}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\times\boldsymbol{a}+\nabla\times\boldsymbol{b} \tag{2.45}$$

$$\mathrm{div}(F\boldsymbol{a})=\nabla\cdot(F\boldsymbol{a})=(\nabla F)\cdot\boldsymbol{a}+F(\nabla\cdot\boldsymbol{a}) \tag{2.46}$$

$$\mathrm{curl}(F\boldsymbol{a})=\nabla\times(F\boldsymbol{a})=(\nabla F)\times\boldsymbol{a}+F(\nabla\times\boldsymbol{a}) \tag{2.47}$$

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b}) \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{curl}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})&=\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\\&=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+(\nabla\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}\\&\quad-(\nabla\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}\end{aligned} \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})&=\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\\&=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})\\&\quad+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})\end{aligned} \tag{2.50}$$

$$\mathrm{div}\ \mathrm{grad}\ F=\nabla\cdot(\nabla F)=\nabla^2F \tag{2.51}$$

$$\mathrm{curl}\ \mathrm{grad}\ F=\nabla\times\nabla F=\boldsymbol{0} \tag{2.52}$$

$$\mathrm{div}\ \mathrm{curl}\ \boldsymbol{a}=\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0 \tag{2.53}$$

$$\mathrm{curl}\ \mathrm{curl}\ \boldsymbol{a}=\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\nabla^2\boldsymbol{a} \tag{2.54}$$

这些公式的证明将部分地作为本章的练习题，由读者自证之。为了帮助读者推证，下面用哈密顿算子证明其中三个较复杂的公式。

由于哈密顿算子兼有微分性质和矢量性质，因此，在运算中除了要遵循微分法则外，还要遵循矢量运算法则，例如式(1.33)和式(1.37)。

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \nabla_a \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) - \nabla_b \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$$

这里，∇下的字母表示∇仅对该字母表示的矢量作用。如果∇后只有一个矢量，就没有必要再加下标。因此

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{b})$$

$$\begin{aligned}\nabla \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) &= \nabla_a \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) - \nabla_b \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}) \\ &= (\boldsymbol{b} \cdot \nabla)\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}(\nabla \cdot \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{b} \\ &\quad + \boldsymbol{a}(\nabla \cdot \boldsymbol{b})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) &= \nabla_a(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) + \nabla_b(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}) \\ &= \boldsymbol{b} \times (\nabla \times \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b} \cdot \nabla)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \times (\nabla \times \boldsymbol{b}) \\ &\quad + (\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

§2.9　梯度、散度、旋度定义的不变性

梯度、散度、旋度定义的不变性，是指纯量场 $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ 的梯度 gradΦ($\nabla\Phi$)、矢量场 A 的散度 div$\boldsymbol{A}$($\nabla \cdot \boldsymbol{A}$)的定义与正交坐标系的取法无关；矢量场 A 的旋度 curl$\boldsymbol{A}$($\nabla \times \boldsymbol{A}$)的定义与右手系的正交坐标系的取法无关。

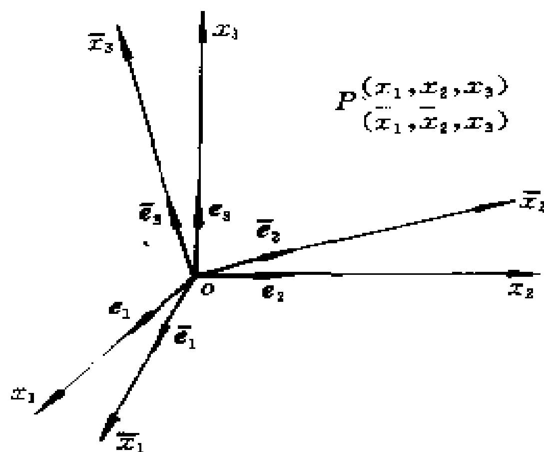


图　2.4

考察共原点 o 的两正交坐标系 $ox_1x_2x_3$ 和 $o\,\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$。坐标轴的单位矢量分别为 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 和$\bar{\boldsymbol{e}}_1$、$\bar{\boldsymbol{e}}_2$、$\bar{\boldsymbol{e}}_3$。点 P 在两坐标系中的坐标为(x_1, x_2, x_3)和$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$。坐标变换的关系式为

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 \\ \bar{x}_2 &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 \\ \bar{x}_3 &= \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3\end{aligned}\right\} \tag{2.55}$$

式中 α_{ij} 中的下标 i、$j=1,2,3$ 分别表示 $\bar{x}_1$、$\bar{x}_2$、$\bar{x}_3$ 轴与 x_1、x_2、x_3 轴之间的方向余弦。如果两坐标系不共原点，且老坐标系($x_1x_2x_3$)的原点 o 在新坐标系($\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$)中的坐标为($\bar{c}_1,\bar{c}_2,\bar{c}_3$)时，坐标变换式为

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \bar{c}_1\\ \bar{x}_2 &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \bar{c}_2\\ \bar{x}_3 &= \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 + \bar{c}_3\end{aligned}\right\} \tag{2.56}$$

式(2.55)表示纯旋转变换，称为正交变换。式(2.56)表示平移加旋转变换，称为仿射变换。

如果纯量场在两坐标系中表为 $\Phi(x_1,x_2,x_3)$ 和 $\Phi(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)$，且

$$\Phi(x_1,x_2,x_3) = \bar{\Phi}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)$$

则称 $\Phi(x_1,x_2,x_3)$ 是不变的。同样地，如果矢量场

$$\boldsymbol{a}(x_1,x_2,x_3) = \bar{\boldsymbol{a}}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)$$

或 $$a_1(x_1,x_2,x_3)\boldsymbol{e}_1 + a_2(x_1,x_2,x_3)\boldsymbol{e}_2 + a_3(x_1,x_2,x_3)\boldsymbol{e}_3$$
$$= \bar{a}_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)\bar{\boldsymbol{e}}_1 + \bar{a}_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)\bar{\boldsymbol{e}}_2 + \bar{a}_3(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)\bar{\boldsymbol{e}}_3$$

则称矢量场 $\boldsymbol{A}(x_1,x_2,x_3)$ 是不变的。这种不变性的意义可以用于梯度、散度、旋度等概念。

由例 1.7 和式(2.55)，有

$$\left.\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{e}}_1 &= (\bar{\boldsymbol{e}}_1\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\bar{\boldsymbol{e}}_1\cdot\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 + (\bar{\boldsymbol{e}}_1\cdot\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3\\ &= \alpha_{11}\boldsymbol{e}_1 + \alpha_{12}\boldsymbol{e}_2 + \alpha_{13}\boldsymbol{e}_3\\ \bar{\boldsymbol{e}}_2 &= (\bar{\boldsymbol{e}}_2\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\bar{\boldsymbol{e}}_2\cdot\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 + (\bar{\boldsymbol{e}}_2\cdot\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3\\ &= \alpha_{21}\boldsymbol{e}_1 + \alpha_{22}\boldsymbol{e}_2 + \alpha_{23}\boldsymbol{e}_3\\ \bar{\boldsymbol{e}}_3 &= (\bar{\boldsymbol{e}}_3\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\bar{\boldsymbol{e}}_3\cdot\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 + (\bar{\boldsymbol{e}}_3\cdot\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3\\ &= \alpha_{31}\boldsymbol{e}_1 + \alpha_{32}\boldsymbol{e}_2 + \alpha_{33}\boldsymbol{e}_3\end{aligned}\right\} \tag{2.57}$$

同理可证得

$$\left.\begin{aligned}
e_1 &= (e_1 \cdot \bar{e}_1)\bar{e}_1 + (e_1 \cdot \bar{e}_2)\bar{e}_2 + (e_1 \cdot \bar{e}_3)\bar{e}_3 \\
&= \alpha_{11}\bar{e}_1 + \alpha_{21}\bar{e}_2 + \alpha_{31}\bar{e}_3 \\
e_2 &= (e_2 \cdot \bar{e}_1)\bar{e}_1 + (e_2 \cdot \bar{e}_2)\bar{e}_2 + (e_2 \cdot \bar{e}_3)\bar{e}_3 \\
&= \alpha_{12}\bar{e}_1 + \alpha_{22}\bar{e}_2 + \alpha_{32}\bar{e}_3 \\
e_3 &= (e_3 \cdot \bar{e}_1)\bar{e}_1 + (e_3 \cdot \bar{e}_2)\bar{e}_2 + (e_3 \cdot \bar{e}_3)\bar{e}_3 \\
&= \alpha_{13}\bar{e}_1 + \alpha_{23}\bar{e}_2 + \alpha_{33}\bar{e}_3
\end{aligned}\right\} \tag{2.58}$$

下面先证明纯量场梯度定义的不变性。引入符号 $\Phi_{,i}$表示$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$；$\Phi_{,\bar{j}}$表示$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}_j}$。于是纯量场的梯度可写为

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}\Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}e_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}e_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}e_3 \\
&= \Phi_{,1}e_1 + \Phi_{,2}e_2 + \Phi_{,3}e_3 \\
&= \sum_i \Phi_{,i}e_i \qquad (i = 1,2,3)
\end{aligned} \tag{2.59}$$

$$\begin{aligned}
\sum_j \Phi_{,\bar{j}}\bar{e}_j &= \sum_j \sum_i \Phi_{,i}x_{i,\bar{j}}\bar{e}_j && \text{（链式法则）} \\
&= \sum_j \sum_i \Phi_{,i}\alpha_{i\bar{j}}\bar{e}_j \\
&= \sum_i \Phi_{,i} \sum_j (e_i \cdot \bar{e}_j)\bar{e}_j && \text{（由于式(2.58)）} \\
&= \sum_i \Phi_{,i}e_i && \text{（由于式(2.57)）}
\end{aligned}$$

式中，$x_{i,\bar{j}} = \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j} = \alpha_{i\bar{j}} = e_i \cdot \bar{e}_j$。

可见，梯度的定义具有不变性。

再证明散度定义的不变性。

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a} = \nabla \cdot \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = \sum_i a_{i,i}$$

$$\sum_{\bar{j}} a_{\bar{j},\bar{j}} = \sum_{\bar{j}} \sum_i a_{\bar{j},i}x_{i,\bar{j}} \qquad \text{（链式法则）}$$

$$= \sum_{\bar{j}} \sum_{i} a_{\bar{j},i} \alpha_{i,\bar{j}}$$

$$= \sum_{i} \left(\sum_{\bar{j}} \alpha_{i\bar{j}} a_{\bar{j}} \right)_{,i} = \sum_{i} a_{i,i} \qquad \text{（由于式(2.58)）}$$

这就证明了散度定义的不变性。

最后证明对于任何右手系的正交坐标系，旋度定义具有不变性。

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} & \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} & \frac{\partial}{\partial \bar{x}_3} \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sum \alpha_{i1} e_i & \sum \alpha_{j2} e_j & \sum \alpha_{k3} e_k \\ \sum \alpha_{i1} \frac{\partial}{\partial x_i} & \sum \alpha_{j2} \frac{\partial}{\partial x_j} & \sum \alpha_{k3} \frac{\partial}{\partial x_k} \\ \sum \alpha_{i1} a_i & \sum \alpha_{j2} a_j & \sum \alpha_{k3} a_k \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i} \sum_{j} \sum_{k} \alpha_{i1} \alpha_{j2} \alpha_{k3} \begin{vmatrix} e_i & e_j & e_k \\ \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_j} & \frac{\partial}{\partial x_k} \\ a_i & a_j & a_k \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

§2.10　线积分与面积分

1.　线积分

连接 A、B 两点的曲线为 L，定义在 L 上的纯量场 Φ 已给定、

设沿 L 量得的弧长为 s，A、B 两点对应于 $s=a$、$b(a<b)$（图 2.5）。称定积分 $\int_a^b \Phi[P(s)]\mathrm{d}s$ 为纯量场 Φ 沿曲线 L 的线积分，用 $\int_L \Phi(x,y,z)\mathrm{d}s$ 表示。当曲线 L 为闭曲线时，用 $\oint_L \Phi(x,y,z)\mathrm{d}s$ 表示。

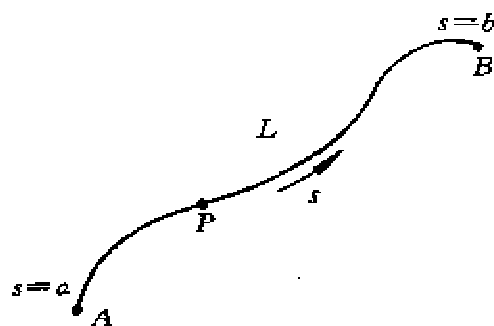


图 2.5

有向曲线 L 的切线单位矢量记为 $\boldsymbol{t}$。设矢量场 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+$

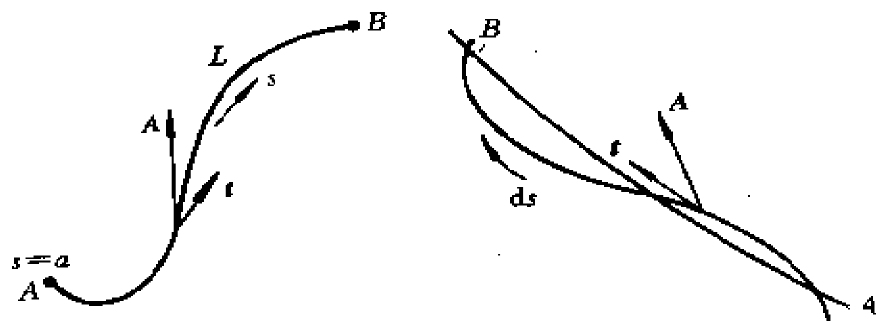


图 2.6

$a_z\boldsymbol{k}$，称 $\int_L \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{t}\mathrm{d}s$ 为 $\boldsymbol{a}$ 沿有向曲线 L 的线积分（图 2.6），也可记为 $\int_L a_t\mathrm{d}s$ 或 $\int_L \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$。

$$\int_L \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{t}\mathrm{d}s=\int_a^b\left(a_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+a_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}+a_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s \tag{2.60}$$

例 2.13 求 $\int_L (x^2y\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y)$。其中 L 为由点 $(-1,1)$ 到点 $(1,1)$ 抛物线 $y=x^2$ 上的一部分。

解： 在 L 上，若取 x 为参数，由 $y=x^2$，$\mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x$，于是

$$\int_L (x^2 y \mathrm{d}x + (y - x)\mathrm{d}y) = \int_{-1}^{1} (x^2(x^2) + (x^2 - x)2x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{1} (x^4 + 2x^3 - 2x^2)\mathrm{d}x = -\frac{14}{15}$$

例 2.14 设矢量场 $\boldsymbol{a} = (y^2 + z^2)\boldsymbol{i} + (z^2 + x^2)\boldsymbol{j} + (x^2 + y^2)\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{a}$ 沿曲线 $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}$ 从原点到点(1,1,1)这段曲线的线积分。

解： 由曲线方程有 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2t, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 3t^2$，于是

$$\int_L \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^1 \left(a_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_z \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 [(y^2 - z^2) + (z^2 + x^2)2t + (x^2 + y^2)3t^2]\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 [t^4 + t^6 + (t^6 + t^2)2t + (t^2 + t^4)3t^2]\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 (2t^3 + 4t^4 + 4t^6 + 2t^7)\mathrm{d}t = 297/140$$

2. 面积分

曲面面积

当点 P 的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 是两变量 u、v 的函数时，如果 (u,v) 在 uv 平面的区域上变动时，点 P 一般地就描出曲面 S。

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)] \tag{2.61}$$

是曲面 S 的参数表示式，(u,v) 是点 P 的曲面坐标。

点 P 是 u、v 曲线的交点(图 2.7(a))，$\boldsymbol{r}_u = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$、$\boldsymbol{r}_v = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ 分别是过点 P 处 u、v 曲线的切线矢量。

假定曲面 S 上 $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq \boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{r}_u$、$\boldsymbol{r}_v$ 在曲面上任意点处是线性无关的。过 P 点由 $\boldsymbol{r}_u$、$\boldsymbol{r}_v$ 决定的平面叫做曲面在 P 点的切平面，与切平面垂直的矢量 $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ 叫做法向矢量，法向单位矢量是

$$\frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|} \tag{2.62}$$

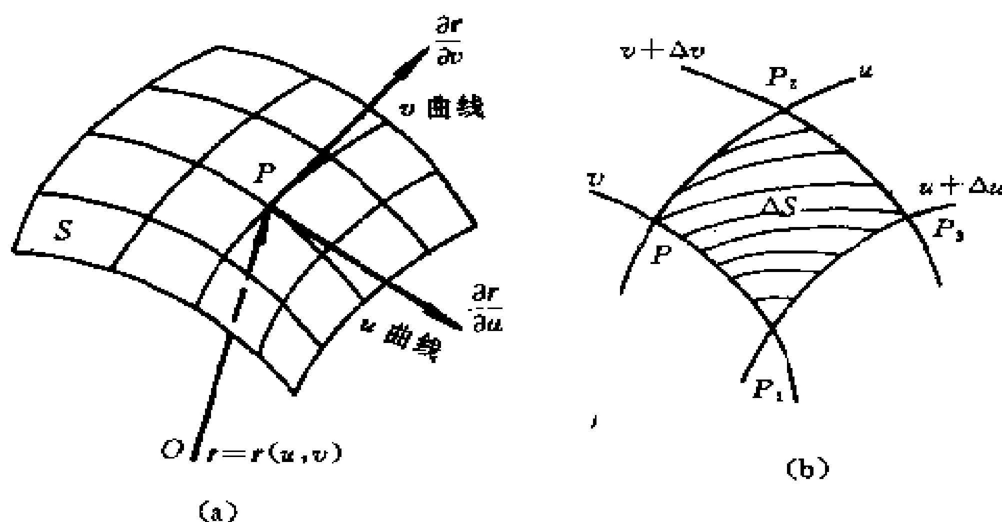


图 2.7

因为两矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的矢积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的大小 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 等于以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为两邻边的平行四边形的面积，所以

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$$

图 2.7(b)所示的微小面积 $\Delta S=|\overrightarrow{PP_1}\times\overrightarrow{PP_2}|$，而

$$\overrightarrow{PP_1} = \boldsymbol{r}(u+\Delta u,v)-\boldsymbol{r}(u,v) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\Delta u$$

$$\overrightarrow{PP_2} = \boldsymbol{r}(u,v+\Delta v)-\boldsymbol{r}(u,v) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\Delta v$$

所以

$$\Delta S = |\overrightarrow{PP_1}\times\overrightarrow{PP_2}| = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|\Delta u\Delta v$$

$$= \sqrt{(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u)(\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v)-(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v)^2}\Delta u\Delta v$$

$$= \sqrt{r_u^2+r_v^2-(r_u\cdot r_v)^2}\Delta u\Delta v$$

面积元素

$$\mathrm{d}S = |\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \sqrt{r_u^2r_v^2-(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \quad (2.63)$$

面积

$$S = \iint_D|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_D\sqrt{r_u^2r_v^2-(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \quad (2.64)$$

式中，D 是对应于 S 的 uv 平面上的区域。

面积分

为了区分曲面的两侧，常常取定其中的一侧作为曲面的正侧，并规定曲面的法线单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 指向正侧；如果曲面是封闭的，则按习惯总是取其外侧为正侧。这种取定了正侧的曲面，称为有向曲面。

设给出已定向的曲面 S 与定义在 S 上的矢量场 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{n}$ 为给出 S 方向的法线单位矢量的矢量场。$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的内积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}$ 是定义在 S 上的纯量场。这个纯量场在 S 上的面积分

$$\iint_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

称为矢量场 $\boldsymbol{a}$ 在已定向的曲面上的面积分，因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=a_n$，所以

$$\iint_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iint_S a_n\mathrm{d}S \tag{2.65}$$

曲面 S 用 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ 给定时，以曲线坐标 (u,v) 表示的法线单位矢量 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v/|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|$ 与给出 S 的方向的法线单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 一致，则

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}$$

由于

$$\mathrm{d}S=|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S&=\iint_D \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\iint_D\left\{a_x\begin{vmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial u}&\dfrac{\partial z}{\partial u}\\\dfrac{\partial y}{\partial v}&\dfrac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}+a_y\begin{vmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial u}&\dfrac{\partial x}{\partial u}\\\dfrac{\partial z}{\partial v}&\dfrac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}\right.\\&\qquad\left.+a_z\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u}&\dfrac{\partial y}{\partial u}\\\dfrac{\partial x}{\partial v}&\dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\right\}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\end{aligned}$$

$$=\iint_D \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v \qquad (2.66)$$

例 2.15 已知曲面方程 $z=f(x,y)$，应用式(2.64)导出曲面面积公式。

解： 设 $u=x, v=y$，则

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}[x,y,f(x,y)]$$

$$\boldsymbol{r}_x=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}=(1,0,f_x), \boldsymbol{r}_y=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}=(1,0,f_y)$$

$$\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{u}_u=1+f_x^2, \quad \boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{r}_v=1+f_y^2, \quad \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v=f_x f_y$$

所以
$$S=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例 2.16 求质量为 M 而密度均匀的球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 对于 z 轴的转动惯量 I。

解： 因为球面的全表面面积是 $4\pi a^2$，密度 ρ 等于 $M/4\pi a^2$。设球面的参数表示为

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(a\sin u\cos v, \quad a\sin u\sin v, \quad a\cos u)$$
$$(0\leqslant u\leqslant \pi, 0\leqslant v\leqslant 2\pi)$$

再设从球面上的点 (x,y,z) 到 z 轴的距离为 d，则

$$d^2=x^2+y^2=a^2\sin^2 u$$

$$\boldsymbol{r}_u=(a\cos u\cos v, \quad a\cos u\sin v, \quad -a\sin u)$$

$$\boldsymbol{r}_v=(-a\sin u\sin v, a\sin u\cos v, 0)$$

所以
$$\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_u=a^2, \quad \boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{r}_v=a^2\sin^2 u, \quad \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v=0$$

$$\sqrt{(\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_u)(\boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{r}_v)-(\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v)^2}=a^2\sin u$$

从而

$$I=\iint_S d^2\rho\mathrm{d}S=\frac{M}{4\pi a^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}v\int_0^{\pi}a^4\sin^3 u\mathrm{d}u$$

$$=\frac{Ma^2}{4\pi}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}Ma^2$$

例 2.17 求 $\iint_S(zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$。其中 S 是球体 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的 $z\geqslant 0$ 的部分。设 $\boldsymbol{n}$ 的方向为由球体的内部指向外部的方向。

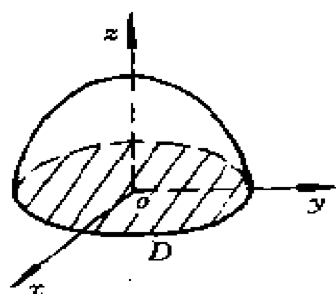


图 2.8

解：取 (x,y) 为上半球面的曲线坐标时，则对于该曲线坐标的法线单位矢量与给出 S 方向的 $\boldsymbol{n}$ 一致(图 2.8)。

因为
$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

所以 $z_x=-x/z$，$z_y=-y/z$，又

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} zx & yz & x^2 \\ 1 & 0 & -x/z \\ 0 & 1 & -y/z \end{vmatrix}$$

$$=2x^2+y^2$$

于是

$$\iint_S(zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$

$$=\iint_D(2x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2(1+\cos^2\theta)r\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}(1+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\mathrm{d}r$$

$$=\frac{3}{4}\pi a^4$$

§2.11 积分定理

1. 平面上的格林(Green)定理

如果在区域 D 与它的边界 ∂D 上*，$P(x,y)$、$Q(x,y)$、$\frac{\partial P}{\partial y}$、$\frac{\partial Q}{\partial y}$连续，则有

$$\int_{\partial D}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (2.67)$$

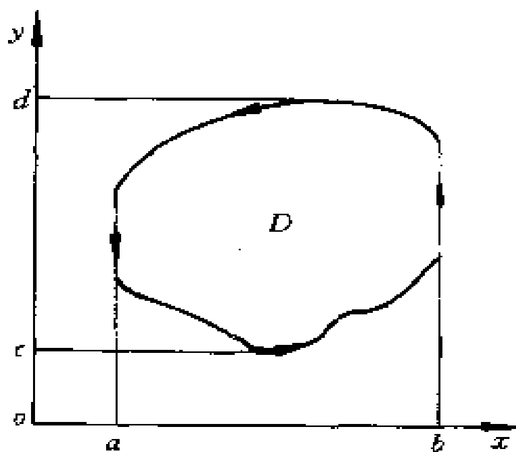


图 2.9

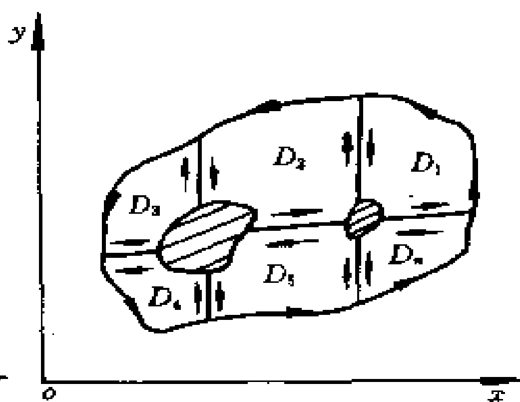


图 2.10

证：先考虑

$a\leqslant x\leqslant b, y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x); c\leqslant y\leqslant d, x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y)$

所表示的区域 D(图 2.9)。因为二重积分的计算公式是

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1}^{y_2}f(x,y)\mathrm{d}y$$

---

* 区域 D 的边界曲线是有方向的，如果沿 D 的边界前进，区域 D 在左侧，则此方向为曲线的正向，或者说，边界曲线 ∂D 的正向与区域 D 的外法线矢量(即k)构成右手系。

$$=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\mathrm{d}x$$

所以
$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_c^d [Q(x_2,y)-Q(x_1,y)]\mathrm{d}y$$

$$=\int_c^d Q(x_2,y)\mathrm{d}y+\int_d^c Q(x_1,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\partial D} Q(x,y)\mathrm{d}y$$

又

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(y)}^{y_2(y)} \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$=-\int_a^b [P(x,y_2)-P(x,y_1)]\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b P(x,y_1)\mathrm{d}x+\int_b^a P(x,y_2)\mathrm{d}x$$

$$=\iint_{\partial D} P(x,y)\mathrm{d}x$$

两式相加即得格林定理的方程。

若 D 为一般区域，将 D 分成使格林定理成立的几部分区域（图 2.10）。由于各部分区域上格林定理成立，将各分区域上的方程相加，由于 D 的边界以外的各条划分区域的边界上的积分互相抵消，所以格林定理对于一般区域成立。

2. 斯托克斯(Stokes)定理

设 S 是以几条闭曲线为边界的有向曲面，矢量场 $\boldsymbol{a}$ 具有连续的偏导函数，于是

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{t}\mathrm{d}S=\iint_S (\mathrm{rot}\boldsymbol{a})\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{2.68}$$

成立。设 $\boldsymbol{a}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$，则下式成立。

$$\int_{\partial S}(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z)$$
$$= \iint_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right] \quad (2.69)$$

证： 设具有边界 ∂S 的任意曲面是非封闭的，平行于 z 轴的直线（虚线）与 S 只交于一点（图 2.11）。∂S 在 xy 平面上的投影给出区域 D_{xy}，其边界为 ∂D_{xy}。取曲面 S 的法线单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 与 z 轴成锐角，即 $\cos(\boldsymbol{n},z)>0$。

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{d}D_{xy} = \cos(\boldsymbol{n},z)\mathrm{d}S$$

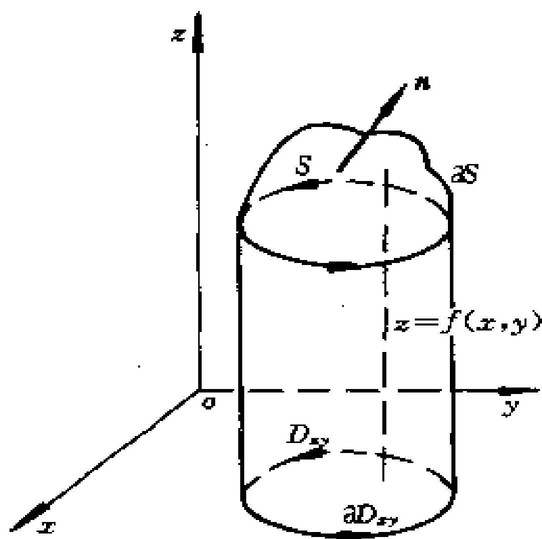


图 2.11

先考察积分 $\int_{\partial S}P(x,y,z)\mathrm{d}x$，曲线 ∂S 在 S 上，利用这个曲面的方程：$z=f(x,y)$，积分号下可以用 $f(x,y)$ 代替 z，这样被积函数 $P[x,y,f(x,y)]$ 就只含有 x 与 y。∂D_{xy} 上各点的坐标 (x,y) 与 ∂S 上各点的坐标对应，所以沿 ∂S 的积分可以用沿 ∂D_{xy} 的积分替换：

$$\int_{\partial S}P(x,y,z)\mathrm{d}x = \int_{\partial D_{xy}}P[x,y,f(x,y)]\mathrm{d}x$$

对于右边的积分可以应用格林定理式(2.67)。这时，$P=P[x,y,f(x,y)]$，$Q=0$，式(2.67)中的 ∂S 则用 ∂D_{xy} 代替。计算 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 时，需要求 P 直接对 y 的导数，以及通过第三变量 z 求对 y 的导数，而 z 我们已经用 $f(x,y)$ 替换了：

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

由式(2.67)，有

$$\int_{\partial S}P\mathrm{d}x=\int_{\partial D_{xy}}P[x,y,f(x,y)]\mathrm{d}x$$

$$=-\iint_{D_{xy}}\left[\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P(x,y,f(x,y))}{\partial z}\cdot\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由解析几何知，曲面 S 在点(x,y,z)的法线的方向余弦与$\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$，$(-1)$成比例，即

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n},z)=-\cos(\boldsymbol{n},x),\ \frac{\partial f}{\partial y}\cos(\boldsymbol{n},z)=-\cos(\boldsymbol{n},y)$$

所以
$$\int_{\partial S}P\mathrm{d}x=\iint_S\left(-\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$$

$$=\iint_S\left(\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}z-\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\tag{a}$$

按坐标 x,y,z 的循环排列计算积分$\int_{\partial S}Q\mathrm{d}y$ 和$\int_{\partial S}R\mathrm{d}z$，

得
$$\int_{\partial S}Q\mathrm{d}y=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x-\frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)\tag{b}$$

$$\int_{\partial S}R\mathrm{d}z=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\right)\tag{c}$$

(a)、(b)、(c)三式相加，即得所证的式(2.68)

$$\int_{\partial S}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z)$$

$$=\iint_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

亦即
$$\int_{\partial S}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{t}\mathrm{d}S=\iint_S(\mathrm{rot}\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

当曲面 S 为一般情况时，同平面上的格林定理的证明一样，将 S 分割后，每个局部写出斯托克斯公式，然后相加即得总的斯

托克斯公式。

如果斯托克斯定理应用于 $A=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$,$S$ 是由几条闭曲线为边界的曲面,D 为 xy 平面上的区域,$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}$ 的情况,则有

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{a}=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

于是
$$\int_{\partial S}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{t}\mathrm{d}S=\iint_S(\mathrm{curl}\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

就成为
$$\int_{\partial D}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

所以格林定理是斯托克斯定理中的特殊情况。

3. 高斯(Gauss)散度定理

如果在空间的区域 V 及其边界的闭曲面 S 上,矢量场 $\boldsymbol{a}$ 具有连续的一阶偏导函数,则

$$\iint_S\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint_V\mathrm{div}\boldsymbol{a}\mathrm{d}V \tag{2.70}$$

成立。设 $\boldsymbol{a}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$,则上式写成

$$\begin{aligned}&\iint_S(P\mathrm{d}y\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\\&=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}-\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{2.71}$$

式中,我们规定曲面 S 的指向为区域 V 的外侧法线单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 的方向。

证: 先证明

$$\iint_S R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_V\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

设 V 表为 $z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)$,$(x,y)\in D$ 的情况,D 是 xy 平面上的区域,如图 2.12 所示。S_1、S_2 的方程分别是 $z=z_1(x,y)$,$z=z_2(x,y)$,于是

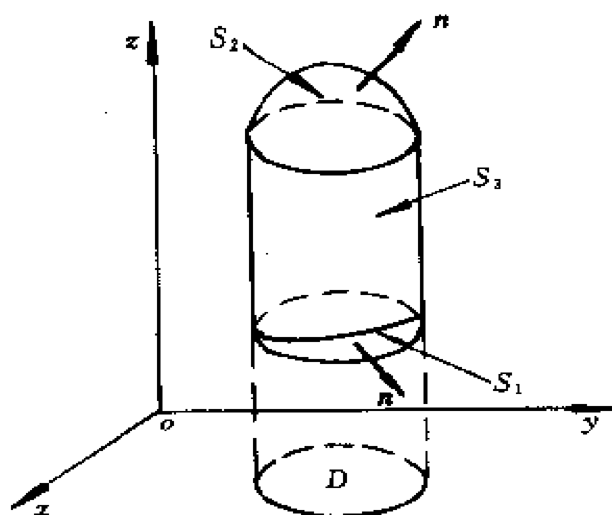


图 2.12

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\iint_D\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_D[R(x,y,z_2(x,y))-R(x,y,z_1(x,y))]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

在曲面 S_2 上,虽然在曲线坐标(x,y)处的法线单位矢量

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\Big/\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\right|$$

与 $\boldsymbol{n}$ 一致,但在曲面 S_1 上,对应的曲线坐标(x,y)的法线单位矢量却等于$-\boldsymbol{n}$,从而

$$\iint_D R(x,y,z_2(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{S_2}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$-\iint_D R(x,y,z_1(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{S_1}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

又
$$\iint_{S_3}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

相加后得

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{S_1}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{S_2}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{S_3}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_S R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{a}$$

区域 V 为一般情况时，同平面上的格林定理的证明一样，将 V 分割为几部分来证明，再相加即得整区域的证明。

同样可以证明：

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{b}$$

$$\iint_S Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{c}$$

(a)、(b)(c)三式相加，即得式(2.70)。

本章概要

1. 纯量自变量的矢函数表为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$，即对于某一范围内 t 的每个值，都有一确定的 $\boldsymbol{a}$ 与之对应。

纯量函数极限与连续性的定义均可用于矢函数。

2. 矢函数的导数

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{a}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{a}(t+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t)}{\Delta t}$$

矢函数求导(偏导)数公式与纯量求导(偏导)数的公式完全相似，要注意的是矢积没有互易性，即次序不能随意调换。

矢径函数对弧长 s 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$ 为一单位矢量。

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right|=\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{|\mathrm{d}s|}=1$$

3. 矢函数的积分运算与纯量函数的积分运算相似。

4. 纯量场 Φ 的梯度

$$\mathrm{grad}\Phi=\nabla\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

方向导数 $\qquad \dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s}=\mathrm{grad}\Phi\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}s}=\nabla\Phi\cdot\boldsymbol{a}$

梯度是方向导数的最大值，即最大变化率。

5. 矢量场的散度

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=\nabla\cdot\boldsymbol{a}$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\Phi)=\nabla\cdot\nabla\Phi=\nabla^2\Phi$$

拉普拉斯算子

$$\nabla^2=\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

6. 矢量场的旋度

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{a}=\nabla\times\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}$$

7. 梯度、散度、旋度的定义具有不变性，即纯量场的梯度($\mathrm{grad}\Phi$)、矢量场的散度($\mathrm{div}\boldsymbol{a}$)与正交坐标系的选择无关，矢量场的旋度($\mathrm{curl}\boldsymbol{a}$)与右手系的正交坐标系的取法无关。

8. 矢函数 $\boldsymbol{a}$ 沿有向曲线的线积分

$$\int_l\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_l\boldsymbol{a}\cdot t\mathrm{d}s=\int_a^b\left(a_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+a_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}+a_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s$$

9. 曲面面元 $\mathrm{d}s=|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\sqrt{r_u^2+r_v^2-(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

曲面面积 $$S=\iint_D|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\iint_D\sqrt{r_u^2+r_v^2-(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

矢量场 $\boldsymbol{a}$ 与曲面 S 的法线单位矢量场 $\boldsymbol{m}$ 的内积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}$ 是纯量，这个纯量场在 S 上的面积分

$$\iint_S\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iint_D\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$
=\iint_D \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v
$$

D 是对应于曲面 S 的 uv 平面上的区域。

10. 积分定理

(1)平面上的格林定理

如果在区域 D 与它的边界 ∂D 上，P、Q、$\dfrac{\partial P}{\partial y}$、$\dfrac{\partial Q}{\partial x}$连续，则

$$
\int_{\partial D}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y
$$

(2)斯托克斯定理

$$
\int_{\partial S}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{t}\mathrm{d}s=\iint_S(\mathrm{curl}\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s
$$

或

$$
\int_{\partial S}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z)=\iint_S\left[+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right.
$$

$$
\left.+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]
$$

可见，平面上的格林定理是斯托克斯定理的特殊情况。

(3)高斯散度定理

$$
\iint_S\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s=\iiint_V\mathrm{div}\boldsymbol{a}\mathrm{d}V
$$

或

$$
\iint_S(P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y)
$$

$$
=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z
$$

习　　题

2.1　已知 $\boldsymbol{a}=\sin t\boldsymbol{i}+\cos t\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$，试求：(i) $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$，(ii) $\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}$，(iii) $\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right|$，

(iv) $\left|\dfrac{d^2\boldsymbol{a}}{dt^2}\right|$。

2.2　已知 $\boldsymbol{a}=e^{-t}\boldsymbol{i}+\ln(t^2-1)\boldsymbol{j}-\mathrm{tg}t\boldsymbol{k}$，试求：$t=0$ 时的(i) $\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt}$，(ii) $\dfrac{d^2\boldsymbol{a}}{dt^2}$，(iii) $\left|\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt}\right|$，(iv) $\left|\dfrac{d^2\boldsymbol{a}}{dt^2}\right|$。

2.3　曲线 C 的参数方程为 $x=x(s), y=y(s), z=z(s)$，式中 S 是从曲线 C 上一定点沿着 C 量得的弧长。设 $\boldsymbol{r}$ 是曲线 C 上任一点 P 的位矢，试证明 $d\boldsymbol{r}/ds$ 是曲线 C 在该点的切线单位矢量。

2.4　试求曲线 $x=a\cos\omega t, y=a\sin\omega t, z=bt$ (a、b、ω 是常数)上任一点的切线单位矢量。

2.5　设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是纯量 u 的可导函数，试证：(i) $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{b}}{dt}+\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt}\cdot\boldsymbol{b}$，(ii) $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\dfrac{d\boldsymbol{b}}{dt}+\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt}\times\boldsymbol{b}$。

2.6　设 $\boldsymbol{a}=t^2\boldsymbol{i}-t\boldsymbol{j}+(2t+1)\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=(2t-3)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-t\boldsymbol{k}$，试求：$t=1$ 时的(i) $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，(ii) $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$，(iii) $\dfrac{d}{dt}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，(iv) $\dfrac{d}{dt}\left(\boldsymbol{a}\times\dfrac{d\boldsymbol{b}}{dt}\right)$。

2.7　试求 $\dfrac{d}{dt}\left(\boldsymbol{a}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt}\times\dfrac{d^2\boldsymbol{a}}{dt^2}\right)$。

2.8　设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是 s 的可导函数，试求 $\dfrac{d}{dt}\left(\boldsymbol{a}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{b}}{ds}-\dfrac{d\boldsymbol{a}}{ds}\cdot\boldsymbol{b}\right)$。

2.9　设 $\boldsymbol{a}$ 的模为常量，且 $\left|\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt}\right|\neq0$，试证明 $\boldsymbol{a}$ 与 $\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt}$ 互相垂直。

2.10　设 $\boldsymbol{a}(t)=3t^2\boldsymbol{i}-(t+4)\boldsymbol{j}-(t^2-2t)\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}(t)=\sin t\boldsymbol{i}+3e^{-t}\boldsymbol{j}-3\cos t\boldsymbol{k}$，试求：$t=0$ 时的 $\dfrac{d^2}{dt^2}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$。

2.11　试证 $\boldsymbol{a}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt}=a\dfrac{da}{dt}$。

2.12　验证微分方程 $\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}+2\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}+5\boldsymbol{r}=0$ 的解是 $\boldsymbol{r}=e^{-t}(\boldsymbol{C}_1\cos2t+\boldsymbol{c}_2\sin2t)$，式中 $\boldsymbol{c}_1$、$\boldsymbol{c}_2$ 是常矢量。

2.13　设 $\boldsymbol{F}$ 是 x、y、z、t 的函数，而 x、y、z 又是 t 的函数，并且都是可导函数，试证

$$\frac{d\boldsymbol{F}}{dt}=\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial z}\frac{dz}{dt}。$$

2.14　设 $\boldsymbol{a}=\cos xy\boldsymbol{i}+(3xy-2x^2)\boldsymbol{j}-(3x-2y)\boldsymbol{k}$，试求：$\dfrac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x}$，$\dfrac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial x^2}$，

$\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial x \partial y}$，$\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial y \partial x}$。

2.15　设 $\boldsymbol{a}=x^2yz\boldsymbol{i}-2xz^3\boldsymbol{j}+xz^2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2z\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}-x^2\boldsymbol{k}$，试求 $P(1,0,-2)$ 点的 $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$。

2.16　验证 $\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{P}_0\exp[i\omega(t-r/c)]}{r}$ 满足偏微分方程 $\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial r}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial t^2}$，式中 $\boldsymbol{P}_0$ 是常矢量，ω、c 是常量，$i=\sqrt{-1}$。

2.17　设 $\boldsymbol{R}(u)=(u-u^2)\boldsymbol{i}+3zu^3\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，试求：(i) $\int \boldsymbol{R}(u)\mathrm{d}u$，(ii) $\int_1^2 \boldsymbol{R}(u)\mathrm{d}u$。

2.18　设 $\boldsymbol{R}(t)=(3t^2-t)\boldsymbol{i}+(2-6t)\boldsymbol{j}-4t\boldsymbol{k}$，试求：(i) $\int \boldsymbol{R}(t)\mathrm{d}t$，(ii) $\int_2^4 \boldsymbol{R}(t)\mathrm{d}t$。

2.19　试求 $\int \boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{d}t$。

2.20　设 $\boldsymbol{a}=t\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2t\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，试求：(i) $\int_1^2 \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\mathrm{d}t$，(ii) $\int_1^2 \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\mathrm{d}t$。

2.21　证明行星的轨道是椭圆，太阳是椭圆的一个焦点。

2.22　设 $\boldsymbol{a}(2)=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{a}(3)=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，试求 $\int_2^3 \boldsymbol{a}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$。

2.23　设 $\Phi(x,y,z)=3x^2y-y^3z^2$，试求在点 $P(1,-2,1)$ 的 $\nabla\Phi$（即 $\mathrm{grad}\Phi$）。

2.24　设 $\boldsymbol{a}=2x^2\boldsymbol{i}-3yz\boldsymbol{j}+xz^2\boldsymbol{k}$，$\Phi=2x-x^3y$，试求在点 $P(1,-1,1)$ 的 $\boldsymbol{a}\cdot\nabla\Phi$ 与 $\boldsymbol{a}\times\nabla\Phi$。

2.25　设 (i) $\Phi=\ln|\boldsymbol{r}|$，(ii) $\Phi=\frac{1}{r}$，试求 $\nabla\Phi$。

2.26　试求 $\nabla|\boldsymbol{r}|^3$。

2.27　试证 $\nabla r^n=nr^{n-2}\boldsymbol{r}$。

2.28　试求 $\nabla(3r^2-4\sqrt{r}+6/\sqrt[3]{r})$。

2.29　试证 $\nabla\Phi$ 垂直于曲面 $\Phi(x,y,z)=c$，式中 c 为常数。

2.30　若 $G\neq 0$，试证 $\nabla\left(\frac{F}{G}\right)=\frac{G\nabla F-F\nabla G}{G^2}$。

2.31　试求曲面 $2xz^2-3xy-4x=7$ 在点 $(1,-1,2)$ 的切平面方程。

2.32　试求曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 $(2,-1,5)$ 的切平面方程与法线方程。

2.33　试证 Φ 的最大变化率(即最大方向导数)的模与方向就是 $\nabla\Phi$ 的模与方向。

2.34　设 $\Phi=axy^2+byz+cz^2x^3$ 在点(1,2,−1)的梯度 $\nabla\Phi$ 平行于 z 轴,其模为64,试求常数 a、b、c 的值。

2.35　试求曲面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与 $z=x^2+y^2-3$ 在点(2,−1,2)的夹角。

2.36　设曲面 $ax^2-byz=(a+2)x$ 与 $4x^2y-z^3=4$ 在点(1,−1,2)正交,试求常数 a、b 的值。

2.37　已知 $\Phi=2x^3y^2z^4$,试求 $\nabla\cdot\nabla\Phi$(即 div gradΦ),并证明 $\nabla\cdot\nabla\Phi=\nabla^2\Phi$。

2.38　设 $\boldsymbol{a}=3xyz^2\boldsymbol{i}+2xy^3\boldsymbol{j}-x^2yz\boldsymbol{k}$,$\Phi=3x^2-yz$,试求:在点(1,−1,1)的(i)$\nabla\cdot\boldsymbol{a}$,(ii)$\boldsymbol{a}\cdot\nabla\Phi$,(iii)$\nabla\cdot(\Phi\boldsymbol{a})$,(iv)$\nabla\cdot(\nabla\Phi)$。

2.39　试证:(i)$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\nabla\cdot\boldsymbol{a}+\nabla\cdot\boldsymbol{b}$,(ii)$\nabla\cdot(\Phi\boldsymbol{a})=(\nabla\Phi)\cdot\boldsymbol{a}+\Phi(\nabla\cdot\boldsymbol{a})$。

2.40　试求 $\nabla^2(\ln r)$。

2.41　试证 $\nabla\cdot\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=0$。

2.42　试证 $\nabla^2(\Phi\psi)=\Phi\nabla^2\psi+2\nabla\Phi\cdot\nabla\psi+\psi\nabla^2\Phi$。

2.43　设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}/r^n$,$n>0$,(其中 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$,$r=|\boldsymbol{r}|$),试求 $\nabla\cdot\boldsymbol{a}$。

2.44　试求:(i)$\nabla\cdot(r^3\boldsymbol{r})$,(ii)$\nabla\cdot[r\nabla(1/r^3)]$,(iii)$\nabla^2[\nabla\cdot(\boldsymbol{r}/r^2)]$。

2.45　设 $\boldsymbol{a}=xz^3\boldsymbol{i}-2x^2yz\boldsymbol{j}+2yz^4\boldsymbol{k}$,试求在点(1,−1,1)的 $\nabla\times\boldsymbol{a}$(即 curl$\boldsymbol{a}$)。

2.46　设 $\boldsymbol{a}=2xz^2\boldsymbol{i}-yz\boldsymbol{j}+3xz^3\boldsymbol{k}$,$\Phi=x^2yz$,试求在点(1,−1,1)处的,(i)$\nabla\times\boldsymbol{a}$,(ii)curl$(\Phi\boldsymbol{a})$,(iii)$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})$,(iv)$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\text{curl}\boldsymbol{a})$,(v)curl grad$(\Phi\boldsymbol{a})$。

2.47　设 $\nabla\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,试求 $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})$。

2.48　试求 $\nabla\times(\boldsymbol{r}/r^2)$。

2.49　试证:(i)$\nabla\times(\nabla\Phi)=\boldsymbol{0}$,(ii)$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0$。

2.50　设 $\boldsymbol{a}=yz^2\boldsymbol{i}-3xz^2\boldsymbol{j}+2xyz\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=3x\boldsymbol{i}+4z\boldsymbol{j}-xy\boldsymbol{k}$,$\Phi=xyz$,试求:(i)$\boldsymbol{a}\times(\nabla\Phi)$,(ii)$(\boldsymbol{a}\times\nabla)\Phi$,(iii)$(\nabla\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$,(iv)$\boldsymbol{b}\cdot\nabla\times\boldsymbol{a}$。

2.51　设 $f(r)$ 可导,试求 curl$(\boldsymbol{r}f(r))$。

2.52　试证 $(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}=\dfrac{1}{2}\nabla v^2-\boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{V})$。

2.53　试证$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})=-\nabla^2\boldsymbol{a}+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})$。

2.54　试证$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})$。

2.55　设$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{\omega}$是常矢，试证$\boldsymbol{\omega}=\dfrac{1}{2}\mathrm{curl}\boldsymbol{V}$。

2.56　试证：(i)$\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b})$，(ii)$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b})$。

2.57　设$\Phi(x,y,z)$对于轴的旋转是一纯量不变量，试证$\mathrm{grad}\Phi$在这种变换下是一矢量不变量。

2.58　试证在旋转变换下，

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}=\bar{\boldsymbol{i}}\frac{\partial}{\partial\bar{x}}+\bar{\boldsymbol{j}}\frac{\partial}{\partial\bar{y}}+\bar{\boldsymbol{k}}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}=\nabla$$

2.59　设$\boldsymbol{a}=(3x^2+6y)\boldsymbol{i}-14yz\boldsymbol{j}+20xz^2\boldsymbol{k}$，试求从点(0,0,0)到点(1,1,1)的积分$\int_C\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$所沿路径$C$是：

(i)$x=t,y=t^2,z=t^3$；

(ii)直线从点(0,0,0)到点(1,0,0)，再到点(1,1,0)最后到点(1,1,1)；

(iii)点(0,0,0)到点(1,1,1)连成的直线。

2.60　设$\boldsymbol{a}=(2y+3)\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+(yz-x)\boldsymbol{k}$，试求积分$\int_C\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，沿的路径$C$及其始、终点如下：

(i)$x=2t^2,y=t,z=t^3$从$t=0$到$t=1$；

(ii)直线从点(0,0,0)到点(0,0,1)再到点(0,1,1)，最后到点(2,1,1)；

(iii)点(0,0,0)到点(2,1,1)连成的直线。

2.61　(i)若$\boldsymbol{F}=\nabla\Phi$，式中$\Phi$是单值连续函数，且其偏导数存在，试证在该场中，力$\boldsymbol{F}$做的功与两点$P_1(x_1,y_1,z_1)$、$P_2(x_2,y_2,z_2)$联接的路径无关；

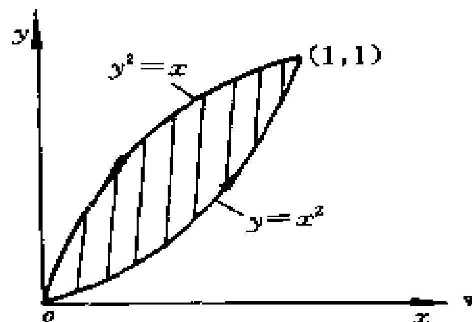
(ii)反之，若$\int_C\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$与两点联接的路径无关，证明函数$\Phi$恰好满足$\boldsymbol{F}=\nabla\Phi$。

2.62　设xy平面的封闭曲线为$x=2\cos t$，$y=3\sin t$，$\boldsymbol{F}=(x-3y)\boldsymbol{i}+(y-2x)\boldsymbol{j}$，试计算从点$t=0$到$t=2\pi$的积分$\oint_C\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$。

2.63　(i)若$\boldsymbol{F}$是保守场，试证$\mathrm{curl}\boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{F}=0$(即无旋场)；

(ii)反之，若$\nabla\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$，证明$\boldsymbol{F}$是保守场。

2.64 设$\boldsymbol{a}=(x-y)\boldsymbol{i}+(x+y)\boldsymbol{j}$，试求沿题 2.64 图的路径的积分$\oint_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}$。



题 2.64 图

2.65 设$\Phi=2xyz^2$，$\boldsymbol{F}=xy\boldsymbol{i}-z\boldsymbol{j}+x^2\boldsymbol{k}$，路径$C$是曲线$x=t^2$，$y=2t$，$z=t^3$，试求沿此路径从$t=0$到$t=1$的下列积分：(i)$\int_C \Phi d\boldsymbol{r}$，(ii)$\int_C \boldsymbol{F}\times d\boldsymbol{r}$。

2.66 (i)试证$\boldsymbol{F}=(y^2\cos x+z^3)\boldsymbol{i}+(2y\sin x-4)\boldsymbol{j}+(3xz^2+2)\boldsymbol{k}$是保守力场；(ii)求$\boldsymbol{F}$的势(纯量)，(iii)求从$(0,1,-1)$到$(\pi/2,-1,2)$$\boldsymbol{F}$力做的功。

2.67 计算$\iint_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}ds$，式中$\boldsymbol{a}=z\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}-3y^2z\boldsymbol{k}$，$S$是从$z=0$到$z=5$第一象限$x^2+y^2=16$的圆柱表面。

2.68 设$\boldsymbol{a}=(3x+y)\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}+(y-2)\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，试计算积分$\oint_C(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times d\boldsymbol{r}$。积分路径是沿$xy$平面的圆周，圆心在原点，半径为 2，反时针方向。

2.69 设$\boldsymbol{F}=y\boldsymbol{i}+(x-2xz)\boldsymbol{j}-xy\boldsymbol{k}$，试计算积分$\iint_S(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}dS$。式中$S$是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$在$xy$平面的上部表面。

2.70 计算下列两种情况下的积分$\iint_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}dS$。(i)$\boldsymbol{a}=y\boldsymbol{i}+2x\boldsymbol{j}-z\boldsymbol{k}$，$S$是第一象限内$2x+y=6$平面的顶部被$z=4$平面所切的表面；(ii)$\boldsymbol{a}=(x+y^2)\boldsymbol{i}-2x\boldsymbol{j}+2yz\boldsymbol{k}$，$S$是第一象限内$2x+y+2z=6$平面的表面。

2.71 设$\boldsymbol{F}=4xz\boldsymbol{i}-y^2\boldsymbol{j}+yz\boldsymbol{k}$，试计算$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dS$。$S$是一立方体的表面，其边界为$x=0$，$x=1$；$y=0$，$y=1$；$z=0$，$z=1$。

2.72 设$\boldsymbol{F}=(x+2y)\boldsymbol{i}-3z\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k}$，$\Phi=4x+3y-2z$，试计算(i)$\iint_S(\nabla\cdot\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}dS$，(ii)$\iint_S \Phi\boldsymbol{n}dS$。$S$是$2x+y+2z=6$平面，其边界为$x=0$，

$x=1$；$y=0$，$y=2$。

2.73　计算 $\int_{(0,0)}^{(2,1)}(10x^4-2xy^3)\mathrm{d}x-3x^2y^2\mathrm{d}y$，沿的路径是 $x^4-6xy^3=4y^2$。

2.74　计算 $\int_{(0,0)}^{(\pi,2)}(6xy-y^2)\mathrm{d}x+(3x^2-2xy)\mathrm{d}y$，沿的路径是摆线 $x=\theta-\sin\theta$，$y=1-\cos\theta$。

2.75　试证以曲线 C 单连封闭的图形面积由式 $\frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$ 计算。

2.76　计算椭圆 $x=a\cos\theta$，$y=b\sin\theta$ 的面积。

2.77　试证在单连通域里当且仅当处处都有 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$，则曲线 C 为封闭边界时 $\oint_C M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y=0$。

2.78　设 $\boldsymbol{F}=\frac{-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}}{x^2+y^2}$，(i)求 $\nabla\times\boldsymbol{F}$，(ii)计算沿任意封闭边界的积分 $\oint\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，并解释计算结果。

2.79　设 $\boldsymbol{a}=4x\boldsymbol{i}-2y^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$，取 $x^2+y^2=4$ 和 $z=0$，$z=3$ 所围的域，验证斯托克斯定理。

2.80　计算 $\iint_S\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$，式中 $\boldsymbol{F}=4xz\boldsymbol{i}-y^2\boldsymbol{j}+yz\boldsymbol{k}$，$S$ 是以 $x=0$，$x=1$；$y=0$，$y=1$；$z=0$，$z=1$ 为边界的立方体表面。

2.81　计算 $\iint_S\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$，式中 S 是封闭曲面。

2.82　试证 $\iiint_V(\Phi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\Phi)\mathrm{d}V=\iint_S(\Phi\nabla\psi-\psi\nabla\Phi)\mathrm{d}S$。

2.83　试证 $\iiint_V\nabla\Phi\mathrm{d}V=\iint_S\Phi\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$。

2.84　试证 $\iiint_V\nabla\times\boldsymbol{b}\mathrm{d}V=\iint_S\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{b}\mathrm{d}s$。

2.85　设 S 是一闭曲面，$\boldsymbol{r}$ 是任一点 $P(x,y,z)$ 从原点量起的位矢。试证明(i)若原点 o 在 S 的外边，积分 $\iint_S\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}S=0$；(ii)若原点 o 在 S 内部，积分 $\iint_S\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}S=4\pi$。

2.86　试证 $\oint\mathrm{d}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{b}=\iint_S(\boldsymbol{n}\times\nabla)\times\boldsymbol{b}\mathrm{d}S$。

第三章　矩　　阵

§3.1　矩阵的加法与乘法

1.　矩阵

任意域 K 中 mn 个元素的有序矩形阵列称为一个 K 上的矩阵，记作

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

a_{ij}是矩阵 A 中第 i 行第 j 列的元素。指标 i 取值 $1,2,\cdots,m$；而指标 j 取值 $1,2,\cdots,n$。在以后的运算中 i、j 常常取值为 3。$m=n$ 的矩阵称为方阵，这个相同的行列数称为方阵的阶。只有一行元素的矩阵称为行阵，只有一列元素的矩阵称为列阵，分别记为

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

当且仅当两个矩阵 A 与 B 的行数相同、列数相同，而且对应行列中的所有元素都相等时，两个矩阵定义为相等。

$$A=B \quad 即 \quad a_{ij}=b_{ij} \tag{3.3}$$

所有元素都为零的矩阵称为零矩阵，记作 0 或 0_{mn}。

2. 矩阵与数的乘法

用数 α 乘矩阵 A 或用矩阵 A 乘 α 的积，定义为把 A 中所有元素都乘上 α 后所得出的矩阵。例如

$$3\begin{pmatrix}1 & 5\\ 3 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 3 & -8\end{pmatrix}3=\begin{pmatrix}3 & 15\\ 9 & -24\end{pmatrix}$$

由数与矩阵的乘法定义，得到下列性质：

(1) $1\cdot A=A$ (3.4)

(2) $0\cdot A=0$ (3.5)

(3) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$ (3.6)

(4) $\det(\alpha A)=\alpha^n\det A$ (3.7)

式(3.7)中 A 是 n 阶方阵，"$\det A$"表矩阵 A 的行列式，因为用 α 乘行列式的任一行中诸元素后，行列式的值变为原值的 α 倍，用 α 乘方阵 A 时，各行的元素都应乘以 α，故有上式结果。

3. 矩阵的加法

两个行数相同、列数相同的矩阵可以相加。其和为将两矩阵行列数相同处的诸元素相加而得的矩阵

$$C=A+B \quad 即 \quad c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \tag{3.8}$$

由定义可得下列性质：

(1) $A+B=B+A$ (交换律) (3.9)

(2) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (结合律) (3.10)

(3) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$ (分配律) (3.11)

(4) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$ (分配律) (3.12)

还可推得

$$A+A=2A, A+A+A=3A,\cdots \tag{3.13}$$

引入记法 $(-1)A=-A$，可得

$$A+(-A)=0, (-\alpha)A=-\alpha A, -(-A)=A,$$

$$-(A+B)=-A-B, \quad A+(-B)=A-B$$

4. 矩阵的乘法

设两矩阵 A、B，A 的列数等于 B 的行数，它们的乘积为矩阵 C，记为 $AB=C$，C 的元素为

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

即两可乘矩阵的乘积为一矩阵，其第 i 行第 j 列的元素为第一矩阵第 i 行诸元素与第二矩阵第 j 列诸元素依次逐对相乘的乘积之和。

例如

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}18 & 19\\ -16 & -13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14 & -7\\ -26 & -8\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}18 & 19\\ -16 & -13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}75 & 131\\ -55 & -97\end{pmatrix}.$$

可见，矩阵的乘法不一定是可易的，即一般情况下，

$$AB\neq BA$$

由矩阵的乘法定义，可推出下列关系：

$$\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)\text{（结合律）}\quad(3.14)$$

$$(A+B)C=AC+BC\quad\text{（分配律）}\quad(3.15)$$

$$C(A+B)=CA+CB\quad\text{（分配律）}\quad(3.16)$$

$$A(BC)=(AB)C\quad\text{（结合律）}\quad(3.17)$$

现证明(3.14)、(3.17)两式，其余两式请读者自证。

设矩阵 A 的元素为 $a_{ij}(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$，矩阵 B 的元素为 $b_{jk}(j=1,\cdots,n;k=1,\cdots,p)$。由乘法规则知矩阵 $\alpha(AB)$ 中第 i 行第 k 列的元素为

$$\alpha(a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots+a_{in}b_{nk})$$

同理，知矩阵 $(\alpha A)B$，$A(\alpha B)$ 中第 i 行第 k 列的元素为

$$(\alpha a_{i1})b_{1k}+(\alpha a_{i2})b_{2k}+\cdots+(\alpha a_{in})b_{nk}$$

$$a_{i1}(\alpha b_{1k})+a_{i2}(\alpha b_{2k})+\cdots+a_{in}(\alpha b_{nk})$$

因为这三式是相等的，故式(3.14)成立。

设 $$AB = D, \quad BC = G$$

由矩阵的乘法规则，有

$$d_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$$

$$g_{jl} = b_{j1}c_{1l} + b_{j2}c_{2l} + \cdots + b_{jn}c_{nl}$$

以 D 乘 C 得 $(AB)C$ 的第 i 行第 l 列的元素为

$$d_{i1}c_{1l} + d_{i2}c_{2l} + \cdots + d_{ip}c_{pl} = \sum_k \sum_j a_{ij}b_{jk}c_{kl}$$

同理，以 A 乘 G 得 $A(BC)$ 的第 i 行第 l 列的元素为

$$a_{i1}g_{1l} + a_{i2}g_{2l} + \cdots + a_{ip}g_{pl} = \sum_j \sum_k a_{ij}b_{jk}c_{kl}$$

除加法的次序不同外，两式完全相等，故式(3.17)成立。

由式(3.17)知，对于有一定顺序的矩阵 A、B、C、…、D 的乘积可以不必在它们之间另加括弧，所以我们不但可以将这条规则用于三个矩阵的乘积，也可用于多个矩阵的乘积。例如四个矩阵的乘积 $ABCD$ 可以写成

$$[(AB)C]D, [A(BC)]D, A[(BC)D], A[B(CD)], (AB)(CD)$$

对于一般情况下矩阵乘法的结合律(式(3.17))，可用数学归纳法证明。

因为矩阵的加法与乘法并不是对任何两个矩阵都能施行，要受到它们之间行列数的某些限制。我们所论述的加法与乘法中，都假定这些矩阵是可加的或可乘的。

容易证明，两方阵乘积的行列式等于它们的行列式的乘积，即

$$\det(AB) = \det A \det B \tag{3.18}$$

方阵 A 的乘幂定义为

$$A^2 = AA, A^3 = AAA, \cdots, A^p = \overbrace{AAA\cdots A}^{p}$$

例 3.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 时，求 A^p(p：正整数)

解： 由于

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & a & b\\0 & 1 & a\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & a & b\\0 & 1 & a\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2a & a^2+2b\\0 & 1 & 2a\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1 & 2a & a^2+2b\\0 & 1 & 2a\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & a & b\\0 & 1 & a\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3a & a^2(1+2)+3b\\0 & 1 & 3a\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

可知

$$A^p=\begin{bmatrix}1 & pa & a^2[1+2+\cdots+(p-1)]+pb\\0 & 1 & pa\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

成立.从而

$$A^{p+1}=\begin{bmatrix}1 & pa & a^2[1+2+\cdots+(p-1)]+pb\\0 & 1 & pa\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & a & b\\0 & 1 & a\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & (p+1)a & a^2(1+2+\cdots+p)+(p+1)b\\0 & 1 & (p+1)a\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

§3.2 方阵的逆阵

对角线上的元素均1,而其他元素均为零的方阵称为么方阵,记作

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\tag{3.19}$$

由矩阵的乘法规则,显然对于任何方阵均可得

$$AI=IA=A\tag{3.20}$$

此等式表征了么方阵 I 的基本性质。型如方阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

的矩阵称为对角形方阵，记作 $\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$。

从运算规则显然易得：两对角形方阵之和与积仍为一对角形方阵。

如果对于方阵 A 有这样的方阵 X 存在，使得

$$XA = AX = I$$

我们说 A 是可逆的，称 X 为 A 的逆阵，记作 $X = A^{-1}$。

容易证明，可逆方阵的逆阵是唯一的，所以用 A^{-1} 的表示逆阵是统一的。

如果 Y 也是 A 的逆阵，用 X 左乘 $AY = I$，得 $XA \cdot Y = X$，也就是 $Y = X$。同样，用 X 右乘 $YA = I$，也得 $Y = X$。

逆阵有如下性质（A，B 均为可逆，α 为纯量）：

$$(A^{-1})^{-1} = A \tag{3.21}$$

$$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}, \alpha \neq 0 \tag{3.22}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \tag{3.23}$$

我们只证明式(3.23)。由于

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$$

由定义可知 $$(AB^{-1}) = B^{-1}A^{-1}$$

这一性质可以推广到多个矩阵的情况，即若 $A_1, A_2, \cdots, A_l$ 是 n 阶可逆阵，则 $A_1A_2\cdots A_l$ 可逆，且

$$(A_1A_2\cdots A_l)^{-1} = A_l^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1} \tag{3.24}$$

定义：n 阶方阵 A 的元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 构成的方阵

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

称为 A 的伴随阵，记为 $\mathrm{adj}A$。

定义：当方阵 A 的行列式不为零时，称 A 为满秩方阵，否则称为降秩方阵。

定理：方阵 A 可逆的充分必要条件是 A 为满秩方阵，并且

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}A}{\det A} \tag{3.25}$$

证明：设 A 可逆，则有方阵 B，使 $AB=I$。由式(3.18)有

$$\det(AB) = \det A \det B = \det I = 1$$

故

$$\det A \neq 0$$

反之，设 A 为满秩方阵，则 $\det A\neq 0$，$\dfrac{\mathrm{adj}A}{\det A}$存在，于是

$$\left(\frac{\mathrm{adj}A}{\det A}\right)A = A\left(\frac{\mathrm{adj}A}{\det A}\right) = I$$

$$(\mathrm{adj}A)A = A(\mathrm{adj}A) = (\det A)I$$

因为方阵 $A(\mathrm{adj}A)$的第 i 行第 j 列元素为

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}$$

由行列式的性质可知，当 $i\neq j$ 时，此式为零，当 $i=j$ 时，此式等于 $\det A$，所以 $A(\mathrm{adj}A)=(\det A)I$。同理有$(\mathrm{adj}A)A=(\det A)I$。

因此，由逆阵的唯一性得

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}A}{\det A} \qquad \text{（证毕）}$$

式(3.25)给出了用伴随阵求逆阵的一种方法。当然，求逆阵还有其他方法，这里不一一叙述。

例 3.2 求方阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$的逆阵 A^{-1}

解：先求伴随阵 $\text{adj}A$

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

因为　　$\det A = -2$

所以　　$A^{-1} = \dfrac{\text{adj}A}{\det A} = \begin{pmatrix} 7/2 & -3 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$

§3.3　转置矩阵

定义：$m \times n$ 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的转置矩阵是 $n \times m$ 矩阵

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

把 A 变为 A^T 称为对 A 作了转置。

对于任意两矩阵 A、B(可加或可乘的)有下列转置关系：

$$(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T \tag{3.26}$$

$$(AB)^T = B^T A^T \tag{3.27}$$

其中 α、β 为任意两纯量。式(3.26)很容易证明。现在证明式(3.27)。$(AB)^T$ 中第 i 行第 j 列的元素等于 AB 中第 j 行第 i 列的元素,就是

$$a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jn}b_{ni}$$

其中 a_{ij}、b_{ij} 各为 A、B 的元素。但此式为 B^T 中第 i 行元素与 A^T 中第 j 列的对应元素的乘积之和,故知 $(AB)^T = B^T A^T$。

设 A 为一满秩方阵,由 $AA^{-1} = I$,按转置规则可得 $(A^{-1})^T A^T = I$,故有

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} \tag{3.28}$$

$A^T = A$(即 $a_{ij} = a_{ji}$)的矩阵 A 称为对称矩阵。若 $A^T = -A$(即 $a_{ij} = -a_{ji}$)的矩阵 A 称为反对称矩阵。

若 $AA^T = I$,即 $A^T = A^{-1}$,称 A 为正交矩阵。因一行列式的值与其转置行列式之值相等,则

$$\det(AA^T) = \det A \det A^T = 1$$

$$(\det A)^2 = 1, \det A = \pm 1$$

可见正交矩阵行列式的值等于 ± 1。$\det A = 1$ 时称 A 为正规正交矩阵,$\det A = -1$ 时,称 A 为非正规正交矩阵。

将 $A^T = A^{-1}$ 转置,得

$$(A^{-1})^T = (A^T)^T = A = (A^{-1})^{-1}$$

可见正交矩阵的逆阵仍为正交矩阵。

设 $A^T = A^{-1}$,$B^T = B^{-1}$

$$(AB)^T = B^T A^T = B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1}$$

可见正交矩阵的乘积仍为正交矩阵。

§3.4 本征值与本征矢量

1. 方程的本征值与本征矢量

设 A 为给定的 n 阶方阵，对于数 λ 与 n 维的非零矢量所构成的列阵 X

$$AX = \lambda X \quad 或 \quad (A - \lambda I)X = 0 \tag{3.29}$$

成立时，称 λ 为 A 的本征值，X 称为对于本征值 λ 的本征矢量。

式(3.29)对于 X 有非平凡解的条件是

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{3.30}$$

这个 λ 的 n 次方程称为 A 的本征方程，它的 n 个根就是 A 的本征值。

例 3.3 求矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ 的本征值与本征矢量。

解：本征方程

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -i \\ i & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 + i^2 = \lambda(\lambda - 2) = 0$$

所以本征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$。

由于
$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix}$$

得
$$x_1^{(1)} = i x_2^{(1)}, x_1^{(2)} = - i x_2^{(2)}$$

可见，对于本征值 0 的本征矢量为 $c\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$，对于本征值 2 的本征矢量为 $c\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$（$c$ 为非零任意数）。

例 3.4 设矩阵 $A=(a_{ij})$ 的本征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 时，试证：(i)$\det A=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，(ii)$\mathrm{tr}A=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$（矩阵 A 的对角元素之和称为矩阵 A 的迹，表为 $\mathrm{tr}A$）。

证：矩阵 A 的本征方程

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=a_n+a_{n-1}\lambda+\cdots+a_1\lambda^{n-1}+(-1)^n\lambda^n=0 \tag{a}$$

由于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为本征值，因而

$$a_n+a_{n-1}\lambda+\cdots+a_1\lambda^{n-1}+(-1)^n\lambda^n$$
$$=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda) \tag{b}$$

(i)式(a)中，令 $\lambda=0$，得 $\det A=a_n$；式(b)中，令 $\lambda=0$ 得 $a_n=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$。所以

$$\det A=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

(ii)在本征方程的行列式的表示中，虽然主对角线元素的乘积是

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)$$

但其余的项不可能出现 λ 的 $n-1$ 次以上的次数。这是因为行列式是从各行、各列分别取出一元素所作成的 n 个元素乘积的 $n!$ 个的和。因此除主对角线元素的乘积以外各项的对角元素至少有两个元素消失了。故对于 λ 项多是 $n-2$ 次。

比较 $(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)$，$(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$ 中的 λ^{n-1} 的系数，得

$$\mathrm{tr}A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$（证毕）

2. 共轭矩阵，埃尔米特(Hermite)矩阵，酉矩阵

将矩阵 A 的各元素用其共轭复数代换所作成的矩阵，称为 A 的共轭矩阵，记作 $\overline{A}$。即

$$A = (a_{ij}) \text{ 时}, \overline{A} = (\overline{a}_{ij})$$

显然 A 的共轭转置矩阵 $(\overline{A})^T = \overline{(A^T)}$。

$(\overline{A})^T = A$ 时，称 A 为埃尔米特矩阵。即方阵 $A=(a_{ij})$，对所有的 i,j 有 $a_{ij}=\overline{a}_{ji}$。由于 $a_{ii}=\overline{a}_{ii}$，所以对角线上的元素都是实数。实对称矩阵当然是埃尔米特矩阵。

例如 $\begin{bmatrix} 1 & i & 1-i \\ -i & -1 & 1 \\ 1+i & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 是埃尔米特矩阵。

方阵满足 $\overline{U}^T U = I$ 时，U 称为酉矩阵。例如 $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ 是酉矩阵。由定义可知，酉矩阵的行列式的绝对值是 1，实酉矩阵与正交矩阵是一回事。

满足 $\overline{A}^T A = A\,\overline{A}^T$ 的方阵 A，称为正规矩阵。埃尔米特矩阵，酉矩阵都是正规矩阵。

定理：埃尔米特矩阵的本征值是实数，作为特殊情况，实对称矩阵的本征值是实数。

证：设 H 为埃尔米特矩阵，λ 为本征值时，则有使得 $HX=\lambda X$，$X\neq 0$ 的 X 存在。

$$\overline{X}^T(HX) = \overline{X}^T(\lambda X) = \lambda \overline{X}^T X$$

同时
$$\overline{X}^T(HX) = \overline{X}^T(\overline{H}^T X) = (\overline{X}^T\,\overline{H}^T)X$$
$$= (\overline{HX})^T X = (\overline{\lambda X})^T X = \overline{\lambda}\,\overline{X}^T X$$

因此 $\lambda \overline{X}^T X = \overline{\lambda}\,\overline{X}^T X$，由于 $X\neq 0$ 得 $\overline{X}^T X > 0$，所以 $\overline{\lambda}=\lambda$，即 λ 是实

数。

实对称矩阵是埃尔米特矩阵，可以其本征值为实数。

定理：酉矩阵的本征值的绝对值是1。作为特殊情况，正交矩阵的本征值的绝对值是1。

证：设 U 是酉矩阵，λ 为其本征值，则有使得 $U\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 的 $\boldsymbol{X}$ 存在。

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{X}}^T\boldsymbol{X} &= \overline{\boldsymbol{X}}^T I\boldsymbol{X} = \overline{\boldsymbol{X}}^T\,\overline{U}^T U\boldsymbol{X} = (\overline{U\boldsymbol{X}})^T U\boldsymbol{X} \\ &= (\overline{\lambda\boldsymbol{X}})^T\lambda\boldsymbol{X} = \lambda\bar{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{X}}^T\boldsymbol{X}\end{aligned}$$

因此有 $(1-\lambda\bar{\lambda})\overline{\boldsymbol{X}}^T\boldsymbol{X}=0$，但是 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，得$\overline{\boldsymbol{X}}^T\boldsymbol{X}>0$，所以 $1=\lambda\bar{\lambda}=|\lambda|^2$，从而$|\lambda|=1$。（证毕）

因为正交矩阵是酉矩阵，所以正交矩阵的本征值的绝对值是1。

3. 矩阵的对角化

设 A 为实对称矩阵，由式(3.29)有

$$A\boldsymbol{X}^{(i)} = \lambda_{(i)}\boldsymbol{X}^{(i)} \tag{a}$$

左乘 $\boldsymbol{X}^{(j)T}$ 得
$$\boldsymbol{X}^{(j)T}A\boldsymbol{X}^{(i)}=\lambda_{(i)}\boldsymbol{X}^{(j)T}\boldsymbol{X}^{(i)} \tag{b}$$

同理有
$$\boldsymbol{X}^{(i)T}A\boldsymbol{X}^{(j)}=\lambda_{(j)}\boldsymbol{X}^{(i)T}\boldsymbol{X}^{(j)} \tag{c}$$

将式(b)转置得
$$\boldsymbol{X}^{(i)T}A\boldsymbol{X}^{(j)}=\lambda_{(i)}\boldsymbol{X}^{(i)T}\boldsymbol{X}^{(j)} \tag{d}$$

式(d)减式(c)得
$$\boldsymbol{0}=(\lambda_{(i)}-\lambda_{(j)})\boldsymbol{X}^{(i)T}\boldsymbol{X}^{(j)} \tag{e}$$

设 $\lambda_{(i)}\neq\lambda_{(j)}$ 则
$$\boldsymbol{X}^{(i)T}\boldsymbol{X}^{(j)}=\boldsymbol{0}$$

因此，对称矩阵 A 的两个不同的本征值 $\lambda_{(i)}$ 与 $\lambda_{(j)}$ 相伴的本征矢量具有性质 $\boldsymbol{X}^{(i)T}\boldsymbol{X}^{(j)}=\boldsymbol{0}$，所以这两个列阵是正交的。一般如果本征值是互异的，则

$$\boldsymbol{X}^{(i)T}\boldsymbol{X}^{(j)} = \boldsymbol{0} \qquad (i\neq j) \tag{3.31}$$

选择适当的纯量因子，可将本征矢量 $\boldsymbol{X}^{(i)}$ 正规化或称正交归一化，使得 $\boldsymbol{X}^{(i)T}\boldsymbol{X}^{(i)}=\boldsymbol{1}$。一般可将本征矢量正规化，使得

$$\boldsymbol{X}^{(i)T}\boldsymbol{X}^{(j)} = \boldsymbol{1} \quad (i=j) \tag{3.32}$$

严格说来，式(3.31)与式(3.32)的右边是$[X]$矩阵，但大多数情况下，可将它们看成纯量。

用正交归一的 $\boldsymbol{X}^{(1)},\boldsymbol{X}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{X}^{(n)}$ 组成

$$P=\begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \cdots & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_n^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \cdots & x_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}^{(1)T} \\ \boldsymbol{X}^{(2)T} \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}^{(n)T} \end{pmatrix}$$

$$P^T=(\boldsymbol{X}^{(1)},\boldsymbol{X}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{X}^{(n)})$$

因 $PP^T=I$，所以 P 是正交矩阵。

$$AP^T=(A\boldsymbol{X}^{(1)},A\boldsymbol{X}^{(2)},\cdots,A\boldsymbol{X}^{(n)})$$
$$=(\lambda_1\boldsymbol{X}^{(1)},\lambda_2\boldsymbol{X}^{(2)},\cdots,\lambda_n\boldsymbol{X}^{(n)})$$

所以

$$P^{-1}AP=PAP^T=\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}^{(1)T} \\ \boldsymbol{X}^{(2)T} \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}^{(n)T} \end{pmatrix}(\lambda_1\boldsymbol{X}^{(1)},\lambda_2\boldsymbol{X}^{(2)},\cdots,\lambda_n\boldsymbol{X}^{(n)})$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n) \tag{3.33}$$

可见 $P^{-1}AP$ 是以 A 的本征值作为其主对角元素的对角阵，记为 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$。

一般的情况是：对于正规矩阵 A（即 $\overline{A}^TA=A\overline{A}^T$）。存在适当的酉矩阵 U，可使 $U^{-1}AU$ 为对角矩阵。这个对角阵的对角线上的元素是 A 的本征值。反之，由酉矩阵能对角化的矩阵是正规矩阵。

n 阶矩阵 A 的正规矩阵的必要与充分条件是，能从 A 的 n 个特征矢量中取出正规正交系。显然，若 A 是实对称矩阵，则可由正交矩阵将其化为对角阵（有关证明请参考线性代数或矩阵论）。

例 3.5 试证能用酉矩阵使其对角化的矩阵是正规矩阵。

证：设 A 为方阵，U 为酉矩阵，$\overline{U}^T AU=D$ 是对角矩阵。这时显然 $\overline{D}^T D=D\,\overline{D}^T$。由于 $\overline{U}^T AU=D$，故有 $A=UD\,\overline{U}^T$。于是

$$\overline{A}^T A=(U\,\overline{D}^T\,\overline{U}^T)(UD\,\overline{U}^T)=U\,\overline{D}^T D\,\overline{U}^T$$

$$A\,\overline{A}^T=(UD\,\overline{U}^T)(U\,\overline{D}^T\,\overline{U}^T)=UD\,\overline{D}^T\,\overline{U}^T$$

所以

$$\overline{A}^T A=A\,\overline{A}^T$$

（证毕）

设正规矩阵 A 用酉矩阵变形为对角矩阵时，

$$AU=U\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

U 的列矢量设为 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n$ 时，$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n$ 是正规正交系，

$$\begin{aligned}AU&=A(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n)=(A\boldsymbol{X}_1,A\boldsymbol{X}_2,\cdots,A\boldsymbol{X}_n)\\&=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}\\&=(\lambda_1\boldsymbol{X}_1,\lambda_2\boldsymbol{X}_2,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{X}_n)\end{aligned}$$

所以，$A\boldsymbol{X}_i=\lambda_i\boldsymbol{X}_i$，即 $\boldsymbol{X}_i$ 是对应于本征值 λ_i 的本征矢量。

例 3.6 把下面矩阵化为对角形矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 1\\ 4 & -12 & 1\end{pmatrix}$$

解：先求本征值

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 4 & -12 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+\lambda^2-\lambda+1$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda^2+1)=0$$

本征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=i,\lambda_3=-i$。

由计算易得，对应于 $\lambda_1=1,\lambda_2=i,\lambda_3=-i$ 的本征矢量分别为 $(3,1,-1),(4+2i,1+i,-4),(4-2i,1-i,-4)$。它们线性无关。取

$$P=\begin{pmatrix} 3 & 4+2i & 4-2i \\ 1 & 1+i & 1-i \\ -1 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

可得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

由式(3.33)有 $\quad \mathrm{tr}(P^{-1}AP)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$

又由例 3.4 可知 $\quad \mathrm{tr}A=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$

故有 $$\mathrm{tr}(P^{-1}AP)=\mathrm{tr}A$$

再则 $$\mathrm{tr}(P^{-1}AP)^2=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2$$

另一方面

$$\mathrm{tr}(P^{-1}AP)^2=\mathrm{tr}P^{-1}APP^{-1}AP=\mathrm{tr}P^{-1}A^2P=\mathrm{tr}A^2$$

故有 $$\mathrm{tr}A^2=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2 \tag{3.34}$$

定理：λ^n(n 为正负整数)是 A^n 的本征值，$\boldsymbol{X}$ 是其本征矢量，即

$$A^n\boldsymbol{X}=\lambda^n\boldsymbol{X} \tag{3.35}$$

证：令 m 为正整数，设 $A^m\boldsymbol{X}=\lambda^m\boldsymbol{X}$，则

$$A^{m+1}\boldsymbol{X}=AA^m\boldsymbol{X}=A\lambda^m\boldsymbol{X}=\lambda^m A\boldsymbol{X}=\lambda^{m+1}\boldsymbol{X}$$

若 A 是非奇异矩阵，则 $A^{-1}\boldsymbol{X}=\lambda^{-1}A^{-1}\lambda\boldsymbol{X}=\lambda^{-1}A^{-1}A\boldsymbol{X}=\lambda^{-1}\boldsymbol{X}$，设 $A^{-m}\boldsymbol{X}=\lambda^{-m}\boldsymbol{X}$，则

$$A^{-(m+1)}\boldsymbol{X}=A^{-1}A^{-m}\boldsymbol{X}=A^{-1}\lambda^{-m}\boldsymbol{X}$$

$$=\lambda^{-m}A^{-1}X=\lambda^{-m}\lambda^{-1}X=\lambda^{-(m+1)}X$$

例 3.7 设 $A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$，求 A^{100}。

解：先求本征值与本征矢量

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}4-\lambda&6&0\\-3&-5-\lambda&0\\-3&-6&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0$$

故本征值 $\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=1$。对应于 $\lambda_1=-2$，方程组 $(A-\lambda I)X=0$ 成为

$$\left.\begin{aligned}6x_1^{(1)}+6x_2^{(1)}\qquad&=0\\-3x_1^{(1)}-3x_2^{(1)}\qquad&=0\\-3x_1^{(1)}-6x_2^{(1)}+3x_3^{(1)}&=0\end{aligned}\right\}$$

它的基础解是$(-1,1,1)$，即对应于 $\lambda_1=-2$ 的本征矢量可写为$(-1,1,1)$。

同样可以求得对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的本征矢量，写为$(-2,1,0)$，$(0,0,1)$。

容易验证，这三个本征矢量是线性无关的。

取 $P=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&-1&0\\-1&-2&1\end{pmatrix}$

因为

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\text{所以}\quad A=P\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$A^2=P\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=P\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^2 P^{-1}$$

$$A^{100}=P\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{100} P^{-1}=P\begin{pmatrix}2^{100} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{100} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2^{100} & -2 & 0\\ 2^{100} & 1 & 0\\ 2^{100} & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2^{100}+2 & -2^{10}+2 & 0\\ 2^{100}-1 & 2^{101}-1 & 0\\ 2^{100}-1 & 2^{101}-2 & 1\end{pmatrix}$$

§3.5 凯莱-哈密顿定理

凯莱-哈密顿(Cayley-Hamilton)定理：设 A 是 n 阶方阵，它的本征方程为

$$\det(A-\lambda I)=(-1)^n\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$$

则有
$$(-1)^nA^n+a_1A^{n-1}+\cdots+a_{n-1}A+a_nI=0 \quad (3.36)$$

该定理还可表述为：方阵满足它自己的本征方程。

证：伴随矩阵 $\mathrm{adj}(A-\lambda I)$ 的元素中含 λ 的最高幂次为 $n-1$ 次，即最高到 λ^{n-1} 项，表为

$$\mathrm{adj}(A-\lambda I)=B_0\lambda^{n-1}+B_1\lambda^{n-2}+B_2\lambda^{n-3}+\cdots+B_{n-3}\lambda^2+B_{n-2}\lambda+B_{n-1}$$

根据行列式展开的性质有 $(A-\lambda I)\mathrm{adj}(A-\lambda I)=I\det(A-\lambda I)$

故有

$$(A-\lambda I)(B_0\lambda^{n-1}+B_1\lambda^{n-2}+B_2\lambda^{n-3}+\cdots$$
$$+B_{n-3}\lambda^2+B_{n-2}\lambda+B_{n-1})$$
$$=I[(-1)^n\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n]$$

使上述等式两边 λ 各次幂的系数相等，得

$$-B_0=(-1)^nI$$
$$AB_0-B_1=a_1I$$
$$AB_1-B_2=a_2I$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$AB_{n-3}-B_{n-2}=a_{n-2}I$$
$$AB_{n-2}-B_{n-1}=a_{n-1}I$$
$$AB_{n-1}\qquad=a_nI$$

将以上各式从上到下按顺序分别乘以 $A^n,A^{n-1},A^{n-2},\cdots,A^2,A,I$。并相加得

$$(-1)^nA^n+a_1A^{n-1}+\cdots+a_{n-1}A+a_0I=0$$

例 3.8 3×3 方阵 A 的本征方程可写成

$$\lambda^3-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\lambda^2+(\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)\lambda-\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0$$

即 $$\lambda^3-\lambda^2\mathrm{tr}A+\frac{1}{2}\lambda[(\mathrm{tr}A)^2-\mathrm{tr}A^2]-\det A=0$$

根据凯莱-哈密顿定理，即方程 A 满足它自己的本征方程，于是有

$$A^3-A^2\mathrm{tr}A+\frac{1}{2}A[(\mathrm{tr}A)^2-\mathrm{tr}A^2]-I\det A=0$$

设 A 为 n 阶满秩方阵，当其本征方程写成 $\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$ 时，根据凯莱-哈密顿定理有

$$A^n+a_1A^{n-1}+\cdots+a_{n-1}A+a_nI=0$$

即 $$a_nI=-(A^{n-1}+a_1A^{n-2}+\cdots+a_{n-1}I)A$$

因为 $\det A\neq 0$，所以 $a_n\neq 0$

故有 $$-\frac{1}{a_n}(A^{n-1}+a_1A^{n-2}+\cdots+a_{n-1}I)A=I$$

根据逆阵的定义，有

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_n}(A^{n-1} + a_1A^{n-2} + \cdots + a_{n-1}I) \qquad (3.37)$$

上式表明，A^{-1}可以由数与A（包括I）的乘幂之积的和来表示，因此可以用它来求逆阵。

例 3.9 求方阵$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$的逆阵。

解：因为A的本征方程为

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

根据式(3.37)，有

$$A^{-1} = -\frac{1}{(-1)}(-A^2 + 3A + 3I)$$

$$= -A^2 + 3A + 3I$$

$$= -\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2 + 3\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 5 & -4 \\ 5 & -6 & 4 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

如果知道n阶方程A的本征多项式$F(\lambda)$，运用凯莱-哈密顿定理，A的任意多项式的计算，可归结到次数为$n-1$以下的多项式的计算。

设$f(A)$为A的多项式，用$F(\lambda)$除$f(\lambda)$就得到如下的形式。

$$f(\lambda) = Q(\lambda)F(\lambda) + R(\lambda), R(\lambda)\text{ 的次数} \leqslant n-1$$

因 $F(A)=0$，得 $f(A)=R(A)$。因此，计算 $f(A)$ 时，只要计算 $R(A)$ 即可。

例 3.10 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$，

求 $2A^8-3A^5+A^4+A^2-4I$。

解： $F(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 2\\ 0 & -1-\lambda & 1\\ 0 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda^3-2\lambda+1)$

而
$$2\lambda^8-3\lambda^5+\lambda^4+\lambda^2-4$$
$$=-(\lambda^3-2\lambda+1)(-2\lambda^5-4\lambda^3+5\lambda^2-9\lambda+14)$$
$$+24\lambda^2-37\lambda+10$$

*因为 $F(A)=-(A^3-2A+I)=0$

所以 $2A^8-3A^5+A^4+A^2-4I=24A^2-37A+10I$

$$=24\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^2-37\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}+10\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}24 & 48 & 48\\ 0 & 48 & -24\\ 0 & -24 & 24\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-37 & 0 & -74\\ 0 & 37 & -37\\ 0 & -37 & 0\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}10 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 48 & -26\\ 0 & 95 & -61\\ 0 & -61 & 34\end{bmatrix}$$

§3.6 极分解定理

1. 正定矩阵

定义：(1) 设 A 是 n 阶实对称方阵，如果 X^TAX 对于列阵 X 的

所有非零值都是正的，则称 A 为正定矩阵，即 $X\neq 0$ 时，$X^TAX>0$

(2)如果对于不全为零的任何实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，二次型

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j>0$$

则称此二次型是正定的，其对应的实对称矩阵 $A=(a_{ij})$ 称为正定矩阵。

定理：n 阶实对称方阵 A 是正定矩阵的必要与充分条件是 A 的本征值都是正数。

证：必要性

若 A 为正定矩阵，λ_i 是其本征值，而对应的本征矢量为 X_i，且 $\det X_i=1$，由定义可知

$$X^TAX>0$$

因为 $$X^{(i)T}AX^{(i)}=X^{(i)T}\lambda_iX^{(i)}=\lambda_iX^{(i)T}X^{(i)}=\lambda_i$$

所以 $$\lambda_i>0$$

充分性　若 A 的本征值 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，由式(3.33)可知，存在正交矩阵 P，使

$$P^TAP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

$$A=P^T\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

$$X^TAX=X^TP^T\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)PX$$

$$=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)X^TP^TPX$$

$$=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)X^TX$$

因 $X\neq 0,\lambda_i>0$，故有 $X^TAX>0$，所以 A 是正定矩阵。　　（证毕）

2. 极分解定理

定理：一任意的非奇异方阵 F 可唯一地分解为一正交矩阵 R 与一正定对称矩阵 U 或 V 的乘积，即

$$F=RU\quad 或\quad F=VR \tag{3.38}$$

证：存在性

令 $C=F^TF$，并令 $\tilde{X}=FX$，于是 C 是对称矩阵，还有

$$X^TCX = X^TF^TFX = \tilde{X}^T\tilde{X}$$

若 $\tilde{X}\neq\mathbf{0}$，则 $\tilde{X}^T\tilde{X}>0$，于是有 $X^TCX>0$，C 是正定的，其本征值都是正数，并用 λ_i^2 表示，取 $\lambda_i>0$。若 C 的正规化本征矢量为 $X^{(i)}$，取 $P^T=(X^{(1)},X^{(2)},\cdots,X^{(n)})$，则 P 是正定矩阵。并有

$$PCP^T = \text{diag}(\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2)$$

定义
$$U = P^T\text{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)P$$

则
$$X^TUX \doteq (PX)^T\text{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)PX$$

因为 P 是正定列阵，故上式大于零，即 $X^TUX>0$，可见 U 是正定矩阵。

$$\begin{aligned}U^2 &= P^T\text{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)PP^T\text{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)P\\ &= P^T\text{diag}(\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2)P = C\end{aligned}$$

由定义 $U=P^T\text{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)P$，$\lambda_i>0$ 且 P 为正交列阵，故 U 为非奇异矩阵。

再定义 $R=FU^{-1}$。要证明式(3.38)中第一式的存在，只要证明 R 是正交的。

$$R^TR = U^{-1}F^TFU^{-1} = U^{-1}CU^{-1} = U^{-1}U^2U^{-1} = I$$

所以 R 确定是正交矩阵。

又定义 $V=RUR^T$，同理可证 V 是正定的，并有 $F=VR$。

唯一性

假设存在另一分解 $F=R_1U_1$，其中 R_1 是正交的，而 U_1 是正定的。于是

$$U_1^2 = U_1^TU_1 = (R_1^TF)^TR_1^TF = F^TR_1R_1^TF = F^TF = C$$

且
$$PU_1^2P^T = (PU_1P^T)(PU_1P^T) = \text{diag}(\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2)$$

所以
$$PU_1P^T = \text{diag}(\pm\lambda_1,\pm\lambda_2,\cdots,\pm\lambda_n)$$

$$U_1 = P^T\text{diag}(\pm\lambda_1,\pm\lambda_2,\cdots,\pm\lambda_n)P$$

$$\begin{aligned}X^TU_1X &= X^TP^T\text{diag}(\pm\lambda_1,\pm\lambda_2,\cdots,\pm\lambda_n)PX\\ &= \xi^T\text{diag}(\pm\lambda_1,\pm\lambda_2,\cdots,\pm\lambda_n)\xi\end{aligned}$$

$$=\pm\lambda_1\xi_1^2\pm\lambda_2\xi_2^2\pm\cdots\pm\lambda_n\xi_n^2$$

这些 U_1 中只有都取正号的那个是正定的，因此 $U_1=U$。

由定义 $R=FU^{-1}$，这里 $R_1=FU_1^{-1}=FU^{-1}=R$。

由定义 $V=RUR^T$，这里 $V_1=R_1U_1R_1^T=RUR^T=V$。

故 $F=RU$ 及 $F=VR$ 是唯一的。（证毕）

本章概要

1. 矩阵的基本运算

(1)矩阵 任意域 K 中 mn 个元素的有序矩形阵列称为一个 K 上的矩阵，记作

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

行阵 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$

列阵 $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

(2)矩阵与数的乘法

$$\alpha A=(\alpha a_{ij})$$

$$\alpha(A)=A\alpha,\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$$

式中 α,β 为纯量。

(3)矩阵的加法

$$C=A+B \quad 即 \quad c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

加法满足交换律、结合律以及与纯量相乘的分配律。

(4)矩阵的乘法

$$C=AB \quad 即 \quad c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

A 的行数与 B 的列数相等时，两矩阵才能相乘。矩阵的乘法满足结合律与分配律，但一般情况下，不满足交换律，即 $AB \neq BA$。

2. 方阵的逆阵

(1)么矩阵 $$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

(2)对角形矩阵

$$\operatorname{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(3)逆阵 $XA=AX=I$ 成立时，称 X 为 A 的逆阵，记作 $A^{-1}=X$。有逆矩阵存在的矩阵称为非奇异矩阵。

逆矩阵有下列性质：$(A^{-1})^{-1}=A$；$(\alpha A)^{-1}=\frac{1}{\alpha}A^{-1}$，$(\alpha\neq 0)$；$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。

设 A 为满秩方阵，A 的伴随阵为

$$\operatorname{adj}A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

A_{ij}为方阵 A 的元素 a_{ij}的代数余子式，则方阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵

$$A^{-1}=\frac{\operatorname{adj}A}{\det A}$$

3. 转置矩阵

矩阵 $A=(a_{ij})$，转置矩阵 $A^T=(a_{ji})$。由定义有 $(AB)^T=B^TA^T$，$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$。

对称矩阵 $A^T=A$ 即 $a_{ij}=a_{ji}$

反对称矩阵 $A^T=-A$ 即 $a_{ij}=-a_{ji}$

正交矩阵　$AA^T=I$　即　$A^T=A^{-1}$。当 $\det A=+1$ 时，称 A 为正规正交矩阵；当 $\det A=-1$ 时，称 A 为非正规正交矩阵。

4. 本征值与本征矢量

(1)当 $AX=\lambda X$ 或 $(A-\lambda I)X=\mathbf{0}$ 成立时，称 λ 为 A 的本征值，X 称为对于本征值 λ 的本征矢量。

本征方程

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

的 n 个根就是 A 的本征值。

矩阵 A 的行列式　$\det A=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

矩阵 A 的迹　$\mathrm{tr}A=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$

(2)共轭矩阵，埃尔米特矩阵，酉矩阵

共轭矩阵　将矩阵 A 的各元素用其共轭复数代换所作成的矩阵，记作 $\overline{A}$。即 $A=(a_{ij})$ 时，$\overline{A}=(\overline{a}_{ij})$。

埃尔米特(Hermite)矩阵　$(\overline{A})^T=A$ 成立的矩阵。由于 $a_{ij}=\overline{a}_{ji}$，显然 $a_{ii}=\overline{a}_{ii}$，所以埃尔米特矩阵的对角线上的元素都是实数。实对称矩阵当然就是埃尔米特矩阵。

酉矩阵　$\overline{U}^TU=I$ 成立的矩阵 U 称为酉矩阵。

正规矩阵　$\overline{A}^TA=A\,\overline{A}^T$ 成立的矩阵 A 称为正规矩阵。

埃尔米特矩阵、酉矩阵都是正规矩阵。

埃尔米特矩阵的本征值是实数，实对称矩阵的本征值当然也是实数。

酉矩阵的本征值的绝对值是 1，正交矩阵的本征值的绝对值也是 1。

(3)矩阵的对角化

对于正规矩阵 A，存在适当的酉矩阵 U，可使 $U^{-1}AU$ 为对角矩阵。那时，对角线上的元素是 A 的本征值，反之，由酉矩阵对角

化的矩阵是正规矩阵。

若 A 为实对称矩阵，则可由正交矩阵 P 将其变形为对角矩阵。即

$$P^{-1}AP = P^{T}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

5. 凯莱-哈密顿(Cayley-Hamilton)定理

定理：方阵 A 满足它自己的本征方程。设 n 阶方阵 A 的本征方程为

$$(-1)^n\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

则有
$$(-1)^n A^n - a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_n I = 0$$

可以利用凯莱-哈密顿定理求方阵的逆阵。当 $\det A \neq 0$($a_n \neq 0$)时，

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_n}(A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \cdots + a_{n-1}I)$$

利用凯莱-哈密顿定理还可大大简化本征多项式的计算。

6. 极分解定理

正定矩阵，即满足 $X^{T}AX > 0$($X \neq 0$)的实对称方阵。正定矩阵的本征值都是正数。

极分解定理

任意的一非奇异方阵 F 可唯一地分解为一正交矩阵 R 与一正定对称矩阵 U 或 V 的乘积。

即
$$F = RU \quad 或 \quad F = VR$$

习　题

3.1 如果 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$，求 $D = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{pmatrix}$，使得 $A + B - D = 0$。

3.2 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$，计

算(i)$A+B$,(ii)$A-C$,(iii) $-2A$。

3.3 设 $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\0 & 1 & 2\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$,求 A^3。

3.4 设 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\-3 & 2 & -1\\-2 & 1 & 0\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}$,计算 AB,BA。

3.5 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\-1 & 2 & 1\end{pmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$,$C=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\1 & -2 & 1+i\end{pmatrix}$,计算(i)$AB$,(ii)$C^TA$。

3.6 设 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}i & 1 & 0\\-1 & 2-i & 2\end{pmatrix}$,$C=\begin{pmatrix}-1 & 3\\1 & -1\end{pmatrix}$,计算(i) $2A+C$;(ii)B^TC,(iii)AC,(iv)CA。

3.7 求下列矩阵 X。

(i)$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & -1 & 2\end{pmatrix}+X=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\1 & -2 & -1\end{pmatrix}$;

(ii)$2\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\-2 & 0 & 2\end{pmatrix}-3X+\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\3 & 1 & -1\end{pmatrix}=0$。

3.8 求矩阵 X,$2X+\begin{pmatrix}3 & -1\\2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}$。

3.9 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,$B=(b_{ij})_{n\times p}$,$C=(c_{ij})_{n\times p}$,试证 $A(B+C)=AB+AC$。

3.10 对于两个矩阵 A、B,求使得$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 成立的条件。

3.11 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,$B=(b_{ij})_{n\times p}$,$C=(c_{ij})_{p\times q}$,试证 $A(BC)=(AB)C$。

3.12 设 A 为 $m\times n$ 矩阵,B 为 $n\times p$ 矩阵,C 为 $r\times q$ 矩阵。问 p,q,r 应满足什么条件才能进行下列运算?运算结果的阶次是多少?(i) ABC,(ii)ACB,(iii)$A(B+C)$?

3.13 试证方阵可唯一地表为对称矩阵与反对称矩阵之和。

3.14 将 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\3 & 0 & 1\\-2 & 2 & 3\end{bmatrix}$表为对称矩阵与反对称矩阵之和。

3.15 设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$的列矢量为 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$,试用 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$

表示 A^TA。

3.16 设 n 阶矩阵 A 的行矢量为 $\boldsymbol{a}^{(1)},\boldsymbol{a}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{a}^{(n)}$ 时，试用 $\boldsymbol{a}^{(1)},\boldsymbol{a}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{a}^{(n)}$ 表示 $A^TA=I$ 成立的条件。

3.17 A、B 为对称矩阵时，试证 $AB+BA$ 为对称矩阵，$AB-BA$ 为反对称矩阵。

3.18 A 为对称矩阵，B 为反对称矩阵，求 AB 为反对称矩阵的条件。

3.19 A、B 为同阶方阵，定义矩阵的迹 $\mathrm{tr}A=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$，求证 $\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}A+\mathrm{tr}B$。

3.20 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，求证 $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$。

3.21 如果 $AB=A$，$BA=B$，试证 A 与 B 都是幂等矩阵（即 $A^2=A$）。

3.22 如果 $AB=A$，$BA=B$，试证(i) $B^TA^T=A^T$，$A^TB^T=B^T$；(ii) A^T，B^T 都是幂等矩阵；(iii)若 A 有逆阵存在，则 $A=B=I$。

3.23 试证 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{pmatrix}$ 为 3 阶幂零矩阵（即 $A^3=0$）。

3.24 若 A 为 2 阶幂零矩阵，试证 $A(I\pm A)^n=A$，n 为任何正整数。

3.25 试证 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。

3.26 若 A 为有逆阵的 n 阶方阵，试证：(i) $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$，(ii) $(\overline{A})^{-1}=\overline{A^{-1}}$，(iii) $(\overline{A}^T)^{-1}=(\overline{A^{-1}})^T$。

3.27 计算 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

3.28 计算下述矩阵的逆矩阵：(i) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$，

(ii) $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$。

3.29 若 A，B 是可交换的非奇异矩阵，试证下述矩阵是可交换的。(i) A^{-1} 与 B，(ii) A^{-1} 与 B^{-1}。

3.30 若 A、B 是非奇异对称矩阵，且可交换，试证(i) $A^{-1}B$，(ii) AB^{-1}，(iii) $A^{-1}B^{-1}$ 是对称的。

3.31 试证当且仅当$(I-A)(I+A)=0$,矩阵 A 是对合矩阵(即 $A^2=I$)。

3.32 若 A 为方阵,$B=rA+sI$,r,s 为纯量,试证 A 与 B 是可交换的。

3.33 若 A 为方阵,试证:(i)AA^T 与 A^TA 是对称的,(ii)$A+\overline{A}^T$,$A\overline{A}^T$,$\overline{A}^TA$ 是埃尔米特矩阵。

3.34 若 H 是埃尔米特矩阵,A 是适合于下列运算的任何矩阵,试证 $(\overline{A})^THA$ 是埃尔米特矩阵。

3.35 若 A 为 n 阶方阵,试证 $B=A+A^T$ 是对称的。

3.36 若 A、B 是 n 阶对称方阵,试证当且仅当 A 与 B 可交换,AB 是对称的。

3.37 试证:若 m 阶方阵 A 是对称的(反对称的),P 是 $m\times n$ 矩阵,则 $B=P^TAP$ 是对称的(反对称的)。

3.38 若 A、B 是 n 阶方阵,试证当且仅当 $A-kI$ 和 $B-kI$(k 为纯量)时,A 与 B 是可交换的。

3.39 试证 P 为非奇异矩阵时,$P^{-1}AP$ 与 A 的本征多项式相同。

3.40 试证 n 阶实对称方阵的本征值都是实数。

3.41 用正交矩阵将 $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$ 化为对角矩阵。

3.42 设 $A=\begin{bmatrix}7 & -2 & 1\\ -2 & 10 & -2\\ 1 & -2 & 7\end{bmatrix}$,$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$,$\lambda_i$ 是 A 的本征值,求正交矩阵 P。

3.43 求以下矩阵的本征值与本征矢量。

(i)$\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$, (ii)$\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 4 & 0 & -2\end{bmatrix}$

3.44 求以下矩阵的本征值与本征矢量。

(i)$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$, (ii)$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

3.45 若 n 阶方阵 A 有 n 个线性无关的不变矢量,试证 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,$\lambda_i$ 是 A 的本征值。

3.46　将 $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$ 化为对角矩阵。

3.47　设 A 为 3 阶方阵，试证：

$$\det(A-\lambda I)=-\lambda^3+\mathrm{tr}A\lambda^2-\mathrm{tr}(\mathrm{adj}A)\lambda+\det A$$

3.48　设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$，计算

$$(A^4-3A^3-4A^2+22A-6I)^{-1}$$

3.49　试证：A 为反对称矩阵，若 λ 为本征值，则 $-\lambda$ 也是本征值。

3.50　试证：A 为 3 阶正交矩阵，且 $\det A=1$ 时，具有本征值 1。其次，如果 -1 是本征值，则它是本征方程的重根。

3.51　试证方阵 A 可唯一地表为 $A=B+iC$（B、C 为埃尔米特矩阵），再将 $A=\begin{pmatrix}1+i & i\\ 2 & 3-i\end{pmatrix}$ 表成 $A=B+iC$ 的形式。

3.52　对于 n 阶矩阵 A 以及非零的 n 维行矢量 x，试证满足 $xA=\lambda x$ 的数 λ 不外是 A 的本征值，称矢量 x 为 A 的左本征矢量；而满足 $Ax=\lambda x$ 的 x 叫做右本征矢量。如仅说本征矢量，指的是右本征矢量。

3.53　试证：矩阵 A 为奇异阵时，A 具有本征值 0。反之，若 A 具有本征值 0 时，则 A 是奇异阵。

3.54　试证：A 为非奇异阵时，A 的本征矢量是 A^{-1} 的本征矢量。又 A^{-1} 的本征值是什么？

3.55　证明与 A 的本征值中相异的本征值所对应的本征矢量是线性无关的。

3.56　设 n 阶矩阵 A 具有相异的 n 个本征值。证明：若 $AB=BA$，则 A 的本征矢量为 B 的本征矢量。

3.57　求矩阵 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & 2c\end{pmatrix}$ 是正交矩阵的条件。

3.58　由矢量 $x_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$，$x_2=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$ 作出正规正交系。

3.59　求与矢量 $x_1=\begin{pmatrix}i\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$，$x_2=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ i\end{pmatrix}$ 都正交，且大小为 1 的矢量。

3.60 求与矢量 $x_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1+i\end{pmatrix}$，$x_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$都正交，且大小为 1 的矢量。

3.61 用适当的酉矩阵使矩阵$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$成为对角矩阵。

3.62 用适当的酉矩阵使矩阵$\begin{pmatrix}1&-i\\i&1\end{pmatrix}$成为对角矩阵。

3.63 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，计算 A^n(n 是正整数)。

3.64 计算：(i)$\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}^n$，(ii)$\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}^n$。

3.65 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\3&1&1\\2&3&1\end{pmatrix}$，用凯莱-哈密顿定理求 A^3，A^4。设 A 为非奇异矩阵，求 A^{-1}，A^{-2}。

第四章　张量概念

§4.1　引　　言

物理学定律不可能依赖于研究者为了描述某一物理现象所选择的坐标系。张量分析的主要目的正是给人们提供一种数学工具，它可以满足一切物理学定律的重要特性，即它与坐标系的选择无关。如果用一些特殊的坐标系，例如直角坐标系、柱面坐标系或球面坐标系等，写出的物理方程，其形式都不一样，这样不但演算麻烦，而且容易混淆物理问题的本质。但是如果采用张量表达形式，则这些方程不论在什么坐标系中都具有相同的形式。因此，当人们用张量分析来讨论问题时，只要证明列示的方程在一个选定的坐标系里是正确的，则它在所有的坐标系里也都是正确的，也就是说无须再在每个坐标系里去验证。对于同样的一个物理学问题，用张量形式写出的方程与用其他数学形式写出的方程相比，不仅本质上具有普遍性，而且由于符号的对称与简洁，使得方程精练而完美。

张量概念起源于高斯(Gauss)、黎曼(Riemann)和克里斯托弗(Christoffel)等建立的微分几何学。张量分析及演算或绝对微分学，是由于吕奇(Ricci)和他的学生勒维-西维塔(Levi-Civita)的共同研究成果而形成数学的一个分支。自从爱因斯坦(Einstein)在1915年发表了关于广义相对论的著名论文以后，张量分析引起了物理学家的关注。近20年来，许多力学问题的研究工作中，张量分析也起着重要的作用。现在，如果物理学工作者，力学工作者对张量分析没有一定程度的通晓，将会严重地影响研究工作的深入和向前发展。

§4.2　N 维空间与坐标变换

1.　N 维空间

在三维空间里，一个点由三个变量（例如 $x,y,z;\rho,\varphi,z$ 或 γ,θ,φ 等）所确定。这组变量称为点的坐标。或者说三个变量 x^1、x^2、x^3 的集合称为一点，这些点则形成一个三维空间。

N 个变量 $x^1,x^2,\cdots,x^n$ 的集合也称为一点（在以下的章节里，上标 $1,2,\cdots,i,\cdots,n$ 只作标号使用，没有任何乘幂指数的意义，为了区别，x^i 的平方用 $(x^i)^2$ 表示。）。所有各点形成一 N 维空间，用 V_n 表示。

定义：N 维空间里的曲线为满足下列 N 个方程的点的轨迹：

$$x^i = x^i(u) \qquad (i = 1,2,\cdots,N) \tag{4.1}$$

式中，u 是参数，而 x^i 是 u 的 N 个满足一定连续条件的函数，通常只要存在所需的各阶导数就够了。

定义：N 维空间的子空间 $V_M(M<N)$ 为满足下列 N 个方程的点集合：

$$x^i = x^i(u^1,u^2,\cdots,u^M) \qquad (i = 1,2,\cdots,N) \tag{4.2}$$

式中有 M 个参数 $u^1,u^2,\cdots,u^M$。$x^i(u^1,u^2,\cdots,u^M)$ 是 $u^1,u^2,\cdots,u^M$ 的 N 个满足一定连续条件的函数。设 $M=N-1$，则子空间称为超曲面。

2.　坐标变换

设 $(x^1,x^2,\cdots,x^N)$ 与 $(\overline{x}^1,\overline{x}^2,\cdots,\overline{x}^N)$ 是一个点在两个不同的坐标系中的坐标。并设两组坐标之间存在着 N 个独立的关系式：

$$\begin{aligned}
\overline{x}^1 &= \overline{x}^1(x^1,x^2,\cdots,x^N) \\
\overline{x}^2 &= \overline{x}^2(x^1,x^2,\cdots,x^N) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\overline{x}^N &= \overline{x}^N(x^1,x^2,\cdots,x^N)
\end{aligned}$$

简写为

$$\bar{x}^k = \bar{x}^k(x^1, x^2, \cdots, x^N) \qquad (k = 1, 2, \cdots, N) \tag{4.3}$$

式中 $\bar{x}^i$ 是 x^j 的单值连续可导函数。N 个 $\bar{x}^i$ 函数无关的必要与充分条件是 $\partial\bar{x}^i/\partial x^j$ 组成的雅可毕行列式不等于零，即

$$J = \det\left(\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^j}\right) \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\bar{x}^n}{\partial x^1} & \frac{\partial\bar{x}^n}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial\bar{x}^n}{\partial x^n} \end{vmatrix} \neq 0$$

在这个条件下，由式(4.3)可解得

$$x^k = x^k(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \cdots, \bar{x}^N) \qquad (k = 1, 2, \cdots, N) \tag{4.4}$$

定义式(4.3)，式(4.4)为从一个坐标系到另一个坐标系的坐标变换。式(4.4)是式(4.3)的唯一的逆变换。

§4.3 指标与排列符号

1. 指标与求和约定

引入以下两项约定：

(1)除了作特殊的说明外，用作上标或下标的拉丁字母指标，都将取从 1 到 N 的值。

(2)若一项中有一个指标重复，则意味着要对这个指标遍历范围 $1, 2, \cdots, N$ 求和。这就是爱因斯坦求和约定。

根据以上的约定，

$$a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N = \sum_{i=1}^{N} a_ix^i$$

则可简写为 a_ix^i。据以求和的指标称为哑指标。一个哑指标可以用任何其他哑指标代替，例如 $a_ix^i = a_jx^j$。在应用求和约定时，一定要

保证任何式子里不许出现两次以上的指标，否则这样式子的意义就不明确了。

式(4.3)、(4.4)中的指标 k，它的取值是从 1 到 N，但没有求和的意义，称为自由指标。

例如，两矩阵相乘 $AB=C$，C 的元素

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

应用求和约定，等式右边可简写为 $a_{ik}b_{kj}$。

三矩阵相乘 ABC 后第 i 行第 l 列的元素可写为 $a_{ij}b_{jk}c_{kl}$。

又如式(4.3)的微分是

$$\mathrm{d}\overline{x}^i = \sum_{p=1}^{N} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^p}\mathrm{d}x^p \qquad (i = 1,2,\cdots,N)$$

应用求和约定，则可写成 $\mathrm{d}\overline{x}^i = \dfrac{\partial \overline{x}_i}{\partial x^p}\mathrm{d}x^p$。

2.　克罗内克(Kronecker)δ 符号

定义　克罗内克 δ 是

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & 若\ i = j \\ 0, & 若\ i \neq j \end{cases} \tag{4.5}$$

如果不分上下标，克罗内克符号也可写成 δ_{ij}。

由定义显然有 $\delta_{im}A_m = A_i,\quad \delta^k_j A^j = A^k$　　(4.6)

$$\delta_{ij}A_{jk} = A_{ik},\quad \delta_{ij}A_{kj} = A_{ki} \tag{4.7}$$

在三维空间里　　$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$

δ_{ij}的矩阵是单位矩阵，即

$$(\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I$$

(4.8)

此外，对正交的单位矢量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$，有 $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}$。

弧元的平方 $(\mathrm{d}s)^2=(\mathrm{d}x_1)^2+(\mathrm{d}x_2)^2+\cdots+(\mathrm{d}x_n)^2$

可写为
$$(\mathrm{d}s)^2=\delta_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j$$

3. 排列符号(Permutation symbols)

定义 排列符号(又称交错符号)是

$$\in_{ijk}=\begin{cases}1 & i,j,k \text{ 成偶排列}\\ -1 & i,j,k \text{ 成奇排列}\\ 0 & \text{其他情况}\end{cases} \tag{4.9}$$

关于 i,j,k 的排列这里作一说明，如果将 1,2,3 中任意一对互换位置，称为一次置换，再互换一对就称为二次置换。如 123→132→312 就是二次置换。如此类推可得三、四、…次置换。由偶次置换得到的排列称为偶排列，例如，123，231，312 为偶排列。显然，奇排列则对应于奇次置换，如 132，321，213。或者说，偶排列是指当 i,j,k 排列在圆周上，i,j,k 的置换按逆时针方向转动；奇排列则是按顺时针方向转动。其他排列是指 i,j,k 中出现重复，如 121，222 等等。

由定义可知，$\in_{ijk}$具有如下的对称性

$$\in_{ijk}=\in_{jki}=\in_{kij}=-\in_{kji}=-\in_{ikj}=-\in_{jik} \tag{4.10}$$

根据行列式的性质及$\in_{ijk}$的定义，可以证明 3×3 矩阵 A 的行列式可表示为

$$\det\boldsymbol{A}=\frac{1}{6}\in_{ijk}\in_{rst}a_{ir}a_{js}a_{kt} \tag{4.11}$$

在右手正交坐标系里，

$$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3,\quad \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1,\quad \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2$$

故有
$$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=\in_{ijk}\boldsymbol{e}_k \tag{4.12}$$

若 $\boldsymbol{a}=a_i\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{b}=b_j\boldsymbol{e}_j$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_i\boldsymbol{e}_i)\times(b_j\boldsymbol{e}_j)=a_ib_j(\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j)=a_ib_j\in_{ijk}\boldsymbol{e}_k$$

即
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\in_{ijk}a_ib_j\boldsymbol{e}_k \tag{4.13}$$

容易证明 $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_ib_j\delta_{ij} \tag{4.14}$$

克罗内克符号与排列符号之间的一个重要关系是

$$\in_{ijk}\in_{ist}=\delta_{js}\delta_{kt}-\delta_{jt}\delta_{ks} \tag{4.15}$$

§4.4 逆变矢量与协变矢量

1. 矢量的两组分量

由矢量的平行四边形法则，可以将矢量 $\boldsymbol{a}$ 在两坐标轴夹角为 θ 的 1-2 坐标系中分解为 $\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 代表的两个分量。如图 4.1 所示。该 1、2 两坐标轴的基矢量为 $\boldsymbol{g}_1$、$\boldsymbol{g}_2$，a^1、a^2 为 $\boldsymbol{a}$ 沿 1、2 坐标轴的分量，

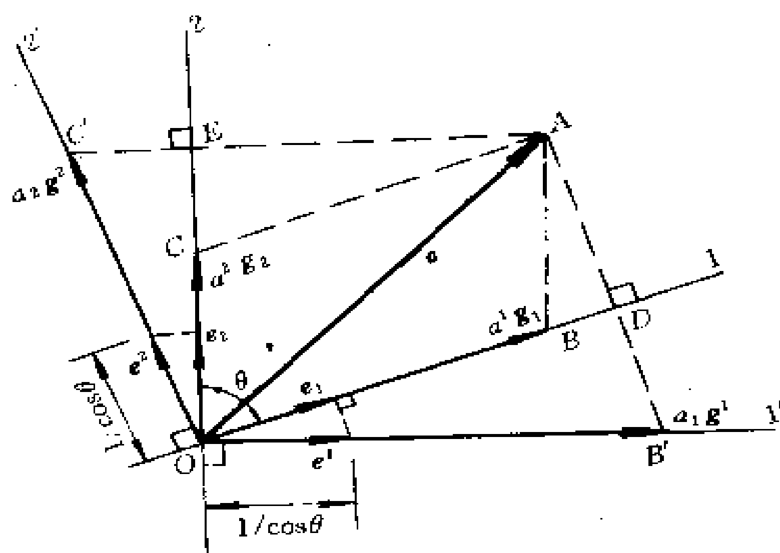


图 4.1

由 $$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

则 $$\boldsymbol{a}=a^1\boldsymbol{g}_1+a^2\boldsymbol{g}_2=a^i\boldsymbol{g}_i \tag{4.16}$$

式中，带上标的分量 a^1、a^2 称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的逆变分量。

过原点 O 作坐标系 1′-2′，使轴 1′垂直于轴 2，轴 2′垂直于轴

1。矢量 $\boldsymbol{a}$ 在 1、2 轴的投影分别为 AD、AE，延长 AD、AE，分别交轴 1′、轴 2′ 于 B'、C'。

于是
$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$$

设 $\boldsymbol{g}^1$、$\boldsymbol{g}^2$ 分别为 1′、2′ 轴的基矢量(注意：不是单位矢量。因为若 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 为单位矢量，则 $\boldsymbol{g}^1$、$\boldsymbol{g}^2$ 的绝对值为 $1/\cos\theta$，见图 4.1)，a_1、a_2 分别为矢量 $\boldsymbol{a}$ 沿 1′、2′ 轴的分量，则

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{g}^1 + a_2\boldsymbol{g}^2 = a_j\boldsymbol{g}^j \tag{4.17}$$

式中，带下标的分量 a_1、a_2 称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的协变分量。因一般情况下 $|\boldsymbol{g}^j|\neq 1$，所以协变分量 a_j 并不就是分矢量 $a_j\boldsymbol{g}^j$(不求和)的大小。

以上阐述的三维空间的概念，不难推广到三维以及多维的情况。

考虑任意两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，将 $\boldsymbol{a}$ 分解成逆变分量，$\boldsymbol{b}$ 分解成协变分量，即

$$\boldsymbol{a} = a^i\boldsymbol{g}_i, \quad \boldsymbol{b} = b_j\boldsymbol{g}^j$$

选择基矢，使它们满足条件，$\boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}_j = \delta^i_j$，则

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a^i\boldsymbol{g}_i \cdot a_j\boldsymbol{g}^j = a^ib_j\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}^j = a^ib_j\delta^j_i = a^ib_i$$

上式表明，如果一个矢量采用逆变分量，而另一个矢量采用协变分量，则在斜角直线坐标系中，两个矢量点乘的公式也同式(1.18)一样简单。

2. 矢量的逆变分量

设老坐标系的基矢为 $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \cdots, \boldsymbol{g}_N$，新坐标系的基矢为 $\bar{\boldsymbol{g}}_1, \bar{\boldsymbol{g}}_2, \cdots, \bar{\boldsymbol{g}}_N$，两组坐标以相互单值变换关系相关联，即

$$\bar{\boldsymbol{g}}_j = M_{jk}\boldsymbol{g}_k \tag{4.18}$$

$$\boldsymbol{g}_i = M_{li}\bar{\boldsymbol{g}}_l \tag{4.19}$$

两式互代得 $\quad \bar{\boldsymbol{g}}_j = M_{jk}M_{lk}\bar{\boldsymbol{e}}_l, \quad \boldsymbol{g}_i = M_{lk}M_{li}\boldsymbol{e}_k$

因为两组基矢量都具有线性独立性，所以

$$M_{jk}M_{lk} = \delta^l_j, M_{lk}M_{li} = \delta^k_i \tag{4.20}$$

由式(4.16)就有 $\boldsymbol{a}=a^j\boldsymbol{g}_j=\overline{a}^i\overline{\boldsymbol{g}}_i$

将式(4.19)代入上式得 $a^jM_{ij}\overline{\boldsymbol{e}}_i=\overline{a}^i\overline{\boldsymbol{e}}_i$

所以有
$$\overline{a}^i = M_{ij}a^j \tag{4.21a}$$

或写成
$$\overline{A}^i = \frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^j}A^j\left(\frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^j} = M_{ij}\right) \tag{4.21b}$$

它们是一矢量的逆变分量。服从式(4.21)变换律的任一量 A^i 简称为逆变矢量。

将方程组(4.21)乘以$\frac{\partial x^k}{\partial\overline{x}^i}$,并对指标 i 遍历 1 到 N 求和,得

$$\frac{\partial x^k}{\partial\overline{x}^i}\overline{A}^i = \frac{\partial x^k}{\partial\overline{x}^i}\frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^j}A^j = \frac{\partial x^k}{\partial x^j}A^j = \delta^k_jA^j = A^k$$

因此,方程组(4.21)的解是

$$A^k = \frac{\partial x^k}{\partial\overline{x}^i}\overline{A}^i \tag{4.22}$$

例如,x^i 的全微分是一逆变矢量,因为

$$\mathrm{d}\overline{x}^i = \frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j \tag{4.23}$$

即这个逆变矢量在任何其他坐标系里的分量就是那个坐标系里的全微分 $\mathrm{d}\overline{x}^i$。可以看出,$\mathrm{d}\overline{x}^i$ 是 $\mathrm{d}x^j$ 的线性齐次式,并且也是 $M_{ij}\left(=\frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^j}\right)$的代数齐次式。

现在考虑又一次坐标变换 $x'^i=x'^i(\overline{x}^1,\overline{x}^2,\cdots,\overline{x}^N)$,于是新分量 A'^i 必由下列方程确定:

$$A'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial\overline{x}^j}\overline{A}^j = \frac{\partial x'^i}{\partial\overline{x}^j}\frac{\partial\overline{x}^j}{\partial x^k}A^k = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}A^k \tag{4.24}$$

这个方程同(4.21)式的形式一样。

例 4.1 试证逆变矢量的变换形成一群。

证: 逆变矢量的变换$\frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^j}$组成的集合 G 中,在原坐标系中的变换$\frac{\partial x^i}{\partial x^j}=\delta^i_j$ 为 G 中的单位元;$\frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^j}$的逆是$\frac{\partial x^j}{\partial\overline{x}^k}$(见式(4.27)),且

$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k}=\delta^i_k$；由式(4.24)知道，可以写出变换 $\overset{1}{M}_{ij}=\frac{\partial \overset{1}{x}^i}{\partial x^j}$，$\overset{2}{M}_{rs}=\frac{\partial \overset{2}{x}^r}{\partial x^s}$，$\overset{3}{M}_{pq}=\frac{\partial \overset{3}{x}^p}{\partial x^q}$等，$\overset{1}{M}_{ij}$、$\overset{2}{M}_{rs}$、$\overset{3}{M}_{pq}$的乘积显然与其次序无关，$\overset{1}{M}_{ij}(\overset{2}{M}_{rs}\overset{3}{M}_{pq})=(\overset{1}{M}_{ij}\overset{2}{M}_{rs})\overset{3}{M}_{pq}$，即乘法满足结合律，可见逆变矢量的变换形成一群。

今后除了特别说明外，单个上标总是表示逆变标记，但坐标 x^i 本身是例外，只有对形式为 $\bar{x}^i=M_{ij}x^j$ 的线性变换，坐标 x^i 才表现为逆变矢量的分量。

3. 协变矢量

由式(4.17)有 $\boldsymbol{a}=a_i\boldsymbol{g}^i$

用式(4.19)两边与上式两边点乘，

$$\boldsymbol{a}\cdot M_{lj}\bar{\boldsymbol{g}}_l = a_i\boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}_j = a_i\delta^i_j = a_j$$

因 $\boldsymbol{a}\cdot\bar{\boldsymbol{g}}_l=\bar{a}_l$，所以 $a_j=M_{lj}\bar{a}_l$

利用式(4.20)可得 $\qquad M_{ij}a_j=M_{ij}M_{lj}\bar{a}_l$

于是有
$$\bar{a}_i = M_{ij}a_j \tag{4.25a}$$

或写成
$$\bar{A}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}A_j \tag{4.25b}$$

它们是一矢量的协变分量。服从式(4.25)变换律的任一量 A_i 简称为协变矢量。

将式(4.25)乘以$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}$，并对指标 i 遍历 1 到 N 求和，得

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\bar{A}_i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}A_j = \frac{\partial x^j}{\partial x^k}A_j = \delta^j_k A_j = A_k$$

即
$$A_k = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\bar{A}_i \tag{4.26}$$

例如，纯量 Φ 的梯度 gradΦ 是协变矢量。因为 $\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}^i}=\frac{\partial \Phi}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}$符合式(4.25)变换律。

除特别说明外，单个下标总表示协变标记。为了同这个约定相一致，可把协变矢量 $\partial\Phi/\partial x^i$ 里的指标 i 当作下标。

现在证明，如果限于如下类型的变换：

$$\overline{x}^i = M_{im}x^m + b^i \tag{4.27}$$

式中 b^i 为 N 个常量，这些常量不一定形成逆变矢量的分量，而 M_{im} 为满足下列关系的常量(不一定形成张量)：

$$M_{ir}M_{im} = \delta^r_m$$

则逆变矢量与协变矢量无区别。

将式(4.27)乘以 M_{ir}，并对指标 i 遍历 1 到 N 求和，得

$$x_r = M_{ir}\overline{x}^i - M_{ir}b^i$$

因此

$$\frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^j}{\partial\overline{x}^i} = M_{ij}$$

这说明式(4.21)与式(4.25)所定义的是同类型的量。

4. 矢量的解析定义

由三个分量所确定的物理量或几何量，当坐标变换时，这些分量按照式(4.21)和式(4.22)或式(4.25)和式(4.26)变换律而变换，这个物理量或几何量称为矢量。这就是矢量的解析定义。

矢量在某一特殊坐标系中如被确定，则矢量在任一坐标系中都可求得。

矢量分量的变换公式对于矢量分量是线性的，又是齐次的。因此，特别是在某一坐标系中等于零的矢量，它在一切坐标系中都等于零。

最后指出：坐标变换公式是从矢量的分解式(4.16)、式(4.17)中推导出来的。所以矢量分量的变换律是矢量加法运算的推论。因此，矢量的几何定义(矢量是可用有向直线线段表示且符合平行四边形加法的量)与矢量的解析定义是等价的。

§ 4.5 不变量

设 Φ 是 N 个坐标 x^i 的函数，如果对于坐标变换有 $\Phi=\overline{\Phi}$，式中 $\overline{\Phi}$ 是 Φ 在新坐标系 $\overline{x}^i$ 里的值，则称 Φ 为不变量或纯量。

例如，u^k 与 v_k 分别为逆变矢量与协变矢量，两个矢量 u^k、v_k 的内积（或纯量积）$u^k v_k$ 是一个绝对不变量。因为

$$\overline{u}^k\overline{v}_k = \frac{\partial\overline{x}^k}{\partial x^l}u^l\frac{\partial x^l}{\partial\overline{x}^k}u_l = u^l v_l = u^k v_k$$

另一个不变量是

$$\delta^i_i = \delta^1_1 + \delta^2_2 + \cdots + \delta^N_N = N$$

§ 4.6 二阶张量

1. 设有 N^2 个函数 A^{ij}，其坐标变换律为

$$\overline{A}^{ij} = \frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial\overline{x}^j}{\partial x^l}A^{kl} \tag{4.28}$$

则称 A^{ij} 为二阶逆变张量的分量。任何 N^2 个函数的集都可以选作二阶逆变张量的分量，所以式(4.28)定义了该张量在任何其他坐标系 $\overline{x}^i$ 的分量。

2. 设有 N^2 个函数 A_{ij}，其坐标变换律为

$$\overline{A}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial\overline{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial\overline{x}^j}A_{kl} \tag{4.29}$$

则称 A_{ij} 为二阶协变张量的分量。

3. 设有 N^2 个函数 A^i_j，其坐标变换律为

$$\overline{A}^i_j = \frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial\overline{x}^j}A^k_l \tag{4.30}$$

则称 A^i_j 为二阶混合张量的分量。

注意，表示逆变的指标应作为张量的上标，而表示协变的指标就应作为张量的下标。混合张量 A^i_j 对于指标 i 是像逆变矢量一样作坐标变换的，而对于指标 j 又应像协变矢量一样进行坐标变换，因此将 i 写作上标，而将 j 写作下标。

例 4.2 设一协变张量在笛卡尔直角坐标系中的分量为 xy，$2y-z^2$，xz。试求它在球面坐标系中的协变分量。

解： 设 A_j 表示张量在笛卡尔直角坐标系 $x^1=x, x^2=y, x^3=z$ 中的协变分量，则

$$A_1 = xy = x^1x^2, A_2 = 2y - z^2 = 2x^2 - (x^3)^2, A_3 = x^1x^3$$

令 $\overline{A}_k$ 表示张量在球面坐标系 $\overline{x}^1=r, \overline{x}^2=\theta, \overline{x}^3=\varphi$ 中的协变分量，由于协变张量的变换律是

$$\overline{A}_k = \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^k} A_j \tag{a}$$

而两组坐标系之间的关系是

$$x^1 = \overline{x}^1 \sin\overline{x}^2 \cos\overline{x}^3$$
$$x^2 = \overline{x}^1 \sin\overline{x}^2 \sin\overline{x}^3$$
$$x^3 = \overline{x}^1 \cos\overline{x}^2$$

故由坐标变换关系式(a)可得

$$\begin{aligned}
\overline{A}_1 &= \frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^1}A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^1}A_2 + \frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^1}A_3 \\
&= (\sin\overline{x}^2\cos\overline{x}^3)(x^1x^2) + (\sin\overline{x}^2\sin\overline{x}^3)(2x^2 - (x^3)^2) \\
&\quad + (\cos\overline{x}^2)(x^1x^3) \\
&= (\sin\theta\cos\varphi)(r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi) \\
&\quad + (\sin\theta\sin\varphi)(2r\sin\theta\sin\varphi - r^2\cos^2\theta) \\
&\quad + (-r\sin\theta)(r^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{A}_2 &= \frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^2}A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^2}A_2 + \frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^2}A_3 \\
&= (r\cos\theta\cos\varphi)(r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi)
\end{aligned}$$

$$+ (r\cos\theta\sin\varphi)(2r\sin\theta\sin\varphi - r^2\cos^2\theta)$$
$$+ (-r\sin\theta)(r^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi)$$
$$\overline{A}_3 = \frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^3}A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^3}A_2 + \frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^3}A_3$$
$$= (-r\sin\theta\sin\varphi)(r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi)$$
$$+ (r\sin\theta\cos\varphi)(2r\sin\theta\sin\varphi - r^2\cos^2\theta)$$
$$+ (0)(r^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi)$$

例 4.3 试证克罗内克符号 δ^i_j 是二阶混合张量。

证： 由式(4.30)有

$$\overline{\delta}^i_j = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j}\delta^k_l = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^j} = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j} = \delta^i_j$$

可见 δ^i_j 是二阶混合张量。 （证毕）

§4.7 高阶张量

1. 高阶张量

一般把阶数高于四阶的张量称为高阶张量。当坐标从 x^i 变换到 $\overline{x}^i$ 时，设 N 个坐标 x^i 的 N^{p+q} 个函数 $A^{k_1k_2\cdots k_p}_{l_1l_2\cdots l_q}$ 的集服从于下列坐标变换律：

$$\overline{A}^{i_1i_2\cdots i_p}_{j_1j_2\cdots j_q} = \frac{\partial \overline{x}^{i_1}}{\partial x^{k_1}}\cdots\frac{\partial \overline{x}^{i_p}}{\partial x^{k_p}}\frac{\partial x^{l_1}}{\partial \overline{x}^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{l_q}}{\partial \overline{x}^{j_q}}A^{k_1k_2\cdots k_p}_{l_1l_2\cdots l_q} \qquad (4.31)$$

则称 $A^{k_1k_2\cdots k_p}_{l_1l_2\cdots l_q}$ 为$(p+q)$阶混合张量。这个张量对于 p 个上标是逆变的，而对于 q 个下标则是协变的。它的变换实际上是式(4.28)与式(4.29)的一个组合。

2. 对称张量

对称张量：二阶张量的两个逆变指标或两个协变指标能够互换且不改变原张量，称这个张量为对称张量。高阶混合张量的两个

逆变指标或两个协变指标互换且不改变原张量称这个张量对于这对指标是对称的。例如，若 $A^{ij}_{\cdot\cdot rs}=A^{ji}_{\cdot\cdot rs}$，则 $A^{ij}_{\cdot\cdot rs}$ 对于指标 i,j 是对称的。

现在证明，设在某个坐标系里，一张量对于两个指标是对称的，则在任何其他坐标系里，该张量对于这对指标仍保持对称。

现对逆变张量 $A^{ij}=A^{ji}$ 进行证明，这样证明无损于普遍性。由式(4.28)有

$$\overline{A}^{ij}=\frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial\overline{x}^j}{\partial x^l}A^{kl}=\frac{\partial\overline{x}^j}{\partial x^l}\frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^k}A^{lk}=\overline{A}^{ji} \tag{4.32}$$

这正是要证明的。

如果两个指标中的一个表示逆变，而另一个表示协变，则对于此两指标，一般不定义对称性。但克罗内克符号是对于它的两个指标(一个上标与一个下标)具有对称性的混合张量，即 $\delta^i_j=\delta^j_i$。

借助于对称矩阵的概念可知，在 N 维空间里，二阶对称张量至多有 $\frac{1}{2}N(N+1)$ 个不同的分量。

3. 反(斜)对称张量

二阶张量的两个逆变指标或两个协变指标互换后，张量分量的大小都不变，正负号都互变了，称这个张量为反对称张量或斜对称张量。高阶混合张量互换两个逆变指标或两个协变指标后，张量分量的大小都不变，而正负号都互变了，则称这个张量对于这对指标是反对称的或斜对称的。可用类似于式(4.32)的方法证明反对称性质也不依赖于坐标系的选择。

如果两个指标中的一个表示逆变，而另一个表示协变，则像对称性一样，也不能对这样的两个指标定义其反对称性。

在 N 维空间里，二阶反对称张量 A^{ij} 至多有 $\frac{1}{2}N(N-1)$ 个不同的算术分量，因为所有的 A^{ii}(不求和)都是零。

从式(4.31)可得到一个重要推论：如果在某个坐标系里，张量

的所有分量在某点都为零，则在任何坐标系里，它们在该点的所有分量也都为零。

4. 张量场

若在空间某区域内每点定义有同型的张量，则这些张量构成一张量场。一般说来，张量场中被考察的张量随位置（和时间）而变化。第六章将介绍对固定时刻研究张量场因位置而变化的情况，这将使我们从张量代数的领域进入到张量分析的领域。

本章概要

1. 设$(x^1,x^2,\cdots,x^N)$与$(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\cdots,\bar{x}^N)$是一点在两个不同的坐标系中的坐标。并设两组坐标之间存在着 N 个独立的关系式：

$$\bar{x}^k = \bar{x}^k(x^1,x^2,\cdots,x^N) \quad (k=1,2,\cdots,N) \tag{a}$$

式中，$\bar{x}^i$ 是 x^j 的单值连续可导函数。雅可毕 $J=\det\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right)\neq 0$ 时，解得

$$x^k = x^k(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\cdots,\bar{x}^N) \quad (k=1,2,\cdots,N) \tag{b}$$

定义式(a)、式(b)两式为从一个坐标系到另一个坐标系的坐标变换。

2. 求和约定：若一项中有一对指标重复，则意味着要对这个指标遍历范围 1,2,…,N 求和。例如 $a_i x^i = a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_Nx^N$。

3. 克罗内克符号：$\delta^i_j=\begin{cases}1, 若\ i=j\\0, 若\ i\neq j\end{cases}$

4. 排列符号：

$$\in_{ijk}=\begin{cases}1, & i,j,k\ 成偶排列\\-1, & i,j,k\ 成奇排列\\0, & 其他情况\end{cases}$$

在三维空间里，$\in_{123}=\in_{231}=\in_{312}=1$；$\in_{321}=\in_{132}=\in_{213}=-1$。当

i,j,k 中有重复指标出现时，其值为零。

5. 逆变矢量与协变矢量

(a)符合变换律 $\overline{A}^i=\dfrac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^j}A^j$ 的矢量称为逆变矢量。

(b)符合变换律 $\overline{A}_i=\dfrac{\partial x^j}{\partial\overline{x}^i}A_j$ 的矢量称为协变矢量。

6. 不变量 $\overline{\Phi}=\Phi$

7. 二阶张量

(a)二阶逆变张量　$\overline{A}^{ij}=\dfrac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^k}\dfrac{\partial\overline{x}^j}{\partial x^l}A^{kl}$

(b)二阶协变张量　$\overline{A}_{ij}=\dfrac{\partial x^k}{\partial\overline{x}^i}\dfrac{\partial x^l}{\partial\overline{x}^j}A_{kl}$

(c)二阶混合张量　$\overline{A}^i_j=\dfrac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^k}\dfrac{\partial x^l}{\partial\overline{x}^j}A^k_l$

8. 高阶张量

$$\overline{A}^{i_1i_2\cdots i_p}_{r_1r_2\cdots r_q}=\frac{\partial\overline{x}^{i_1}}{\partial x^{k_1}}\cdots\frac{\partial\overline{x}^{i_p}}{\partial x^{k_p}}\frac{\partial x^{l_1}}{\partial\overline{x}^{r_1}}\cdots\frac{\partial x^{l_q}}{\partial\overline{x}^{r_q}}A^{k_1k_2\cdots k_p}_{l_1l_2\cdots l_q}$$

9. 对称张量

若逆变或协变张量的所有指标都能互换而不改变张量，则该张量为对称张量。例如 $A_{ij}=A_{ji}$。在 N 维空间里，二阶对称张量至多有 $\dfrac{1}{2}N(N+1)$ 个不同的分量。

10. 反(斜)对称张量

若逆变或协变张量的所有指标，都能在每对指标互换后，张量的分量仅改变其正负号，则该张量为反对称张量。例如 $A^{ij}=-A^{ji}$。在 N 维空间里，二阶反对称张量 A^{ij} 至多有 $\dfrac{1}{2}N(N-1)$ 个不同的算术分量。

习　　题

4.1　用求和约定改写下列各式：

(a) $\mathrm{d}\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1+\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+\cdots+\frac{\partial\Phi}{\partial x^N}\mathrm{d}x^N$，

(b) $\frac{\mathrm{d}\bar{x}^k}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^1}\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^2}\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}+\cdots+\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^N}\frac{\mathrm{d}x^N}{\mathrm{d}t}$，

(c) $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+\cdots+(x^N)^2$，

(d) $\mathrm{d}s^2=g_{11}(\mathrm{d}x^1)^2+g_{22}(\mathrm{d}x^2)^2+g_{33}(\mathrm{d}x^3)^2$，

(e) $\sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}g_{pq}\mathrm{d}x^p\mathrm{d}x^q$。

4.2　用求和约定改写下列各式：

(a) $a_1x^1x^3+a_2x^2x^3+\cdots+a_Nx^Nx^3$，

(b) $A^{21}B_1+A^{22}B_2+A^{23}B_3+\cdots+A^{2N}B_N$，

(c) $A^j_1B^1+A^j_2B^2+A^j_3B^3+\cdots+A^j_NB^N$，

(d) $g^{21}g_{11}+g^{22}g_{21}+g^{23}g_{31}+g^{24}g_{41}$，

(e) $B^{121}_{11}+B^{122}_{12}+B^{221}_{21}+B^{222}_{22}$。

4.3　将下列用求和约定写成的表示式改写为多项求和的表示式：

(a) $a_{jk}x^k$，(b) $A_{pq}A^{qr}$，(c) $\bar{g}_{rs}=g_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^r}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^s}$，$N=3$。

4.4　将下列用求和约定写成的表示式改写为多项求和的表示式：

(a) $\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}\,A^k)$，$N=3$；(b) $A^{\mu}B^{\rho}_{\cdot k}C_j$，$N=2$；

(c) $\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^m}$。

4.5　在直角坐标 x^k，$k=1,2,\cdots,N$ 中，下列方程当 $N=2,3$ 或 $N\geqslant4$ 时各表示什么轨迹？必要时，假设这些函数是单值、连续可导、独立的，

(a) $a_kx^k=1$，式中 k 为常量，(b) $x^kx^k=1$，(c) $x^k=x^k(u)$，(d) $x^k=x^k(u,v)$。

4.6　当 $N=2,3$ 或 4 时，方程 $a_kx^kx^k=1$ 表示什么轨迹？式中 x^k，$k=1,2,\cdots,N$ 是直角坐标，a_k 是非负常数。

4.7　在三维空间里，求下列含克罗内克符号 δ_{ij} 表示式的值。(a) $\delta_{ij}\delta_{ij}$，(b) $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk}$。

4.8　在三维空间里，求下列含克罗内克符号 δ_{ij} 表示式的值。(a) $\delta_{ij}\delta_{jk}$，(b) $\delta_{ij}\delta_{ik}$。

4.9　计算：(a) $\delta^p_qA^{qs}_r$，(b) $\delta^p_q\delta^q_r$。

4.10 计算：(a)$\delta^p_q B^{qr}_p$，(b)$\delta^p_q \delta^s_r A^{qr}$，(c)$\delta^p_q \delta^q_r \delta^r_s$。

4.11 试证：在三维空间里，$\in_{ijk}\in_{kij}=6$。

4.12 试证：在三维空间里，$\in_{ijk}a_j a_k=0$。

4.13 试证：$\in_{pqs}\in_{mnr}=\begin{vmatrix} \delta_{mp} & \delta_{mq} & \delta_{ms} \\ \delta_{np} & \delta_{nq} & \delta_{ns} \\ \delta_{rp} & \delta_{rq} & \delta_{rs} \end{vmatrix}$

4.14 设 $\det|A_{ij}|$ 是由第 i 行和第 j 列的元素 A_{ij} 所确定的行列式，试证 $\det|A_{ij}|=\in_{ijk}A_{1i}A_{2j}A_{3k}$。

4.15 试证：$\in_{pqs}\in_{mrs}=\delta_{pm}\delta_{qr}-\delta_{pr}\delta_{qm}$。

4.16 试证：$\in_{pqs}\in_{rqs}=-2\delta_{pr}$。

4.17 用下标表示法，证明：若 $\dot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}$，$\dot{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$，则有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$。

4.18 用下标表示法，证明：$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$。

4.19 证明：$\frac{\partial x^p}{\partial x^q}=\delta^p_q$。

4.20 证明：$\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^q}\frac{\partial \overline{x}^q}{\partial x^r}=\delta^p_r$。

4.21 写出下列张量的变换律：(a) $A^i_{\cdot jk}$，(b) $B^{mn}_{\cdot\cdot ijk}$，(c)C^m。

4.22 写出下列张量的变换律：(a) $A^{ij}_{\cdot\cdot k}$，(b)$B^{ijk}_{\cdot\cdot\cdot m}$，(c)$C_{mn}$，(d)$A_n$。

4.23 $A(j,k,l,m)$是坐标 x^i 的函数，它从坐标系 x^i 变换到坐标系 $\overline{x}^i$ 时符合以下的变换律：

$$\overline{A}(p,q,r,s)=\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^p}\frac{\partial \overline{x}^q}{\partial x^k}\frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^l}\frac{\partial \overline{x}^s}{\partial x^m}A(j,k,l,m)$$

试问 $A(j,k,l,m)$是不是张量？如是张量，请写出张量的上、下指标，并说明其逆变与协变的阶数。

4.24 设 $\overline{B}(p,q,r)=\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^p}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^q}\frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^m}B(j,k,m)$，$\overline{C}(p,q,r,s)=\frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^j}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^s}{\partial x^n}C(j,k,m,n)$。问哪一个是张量？写出张量的上、下指标，并说明其逆变与协变的阶数。

4.25 设一张量在笛卡尔直角坐标系里的协变分量为 $2x-z$，x^2y，yz。试求该张量在柱面坐标系 ρ、φ、z 中的协变分量。

4.26 试求上题中张量在球面坐标系 γ,θ,φ 中的协变分量。

4.27 试证：虽然 A_p 是一阶协变张量，但$\frac{\partial A_p}{\partial x^q}$不是张量。

4.28 如果 Φ 是不变量，问 $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^p\partial x^q}$ 是不是张量。

4.29 如果 $\overline{A}^p_{\cdot r} = \dfrac{\partial\overline{x}^p}{\partial x^q}\dfrac{\partial x^s}{\partial\overline{x}^r}A^q_{\cdot s}$，证明 $A^q_{\cdot s} = \dfrac{\partial x^q}{\partial\overline{x}^p}\dfrac{\partial\overline{x}^r}{\partial x^s}\overline{A}^p_{\cdot r}$ 。

4.30 设 $A^{pq}_{\cdot\cdot r}$ 是张量，试证 $A^{pr}_{\cdot\cdot r}$ 是一阶逆变张量。

4.31 设 B^i 与 C^j 是逆变矢量，A_{ij}是协变张量，试证 $A_{ij}B^iC^j$ 是不变量。

4.32 设 A_{ij}是反对称张量，试证

$$(\delta^i_j\delta^k_l + \delta^i_l\delta^k_j)A_{ik} = 0$$

4.33 试证 $B_{ik} = \in_{ijk}a_j$ 是反对称张量。

4.34 在三维空间里，按(a)$D_{ij} = D_{ji}$、(b)$D_{ij} = -D_{ji}$，展开并尽可能化简 $D_{ij}x_ix_j$。

第五章　张量代数

§5.1　张量的加法、减法与乘法

1.　和与差

凡张量中具有同数的协变指标与同数的逆变指标（即同阶的张量）者，都能相加或相减。

例如
$$C^{ij}_{\cdot\cdot k} = A^{ij}_{\cdot\cdot k} \pm B^{ij}_{\cdot\cdot k} \tag{5.1}$$

设 $A^{ij}_{\cdot\cdot k}$ 与 $B^{ij}_{\cdot\cdot k}$ 是张量，它们相加或相减，所得到的和或差仍是一个同阶的张量。证明如下：

根据 $A^{ij}_{\cdot\cdot k}$，$B^{ij}_{\cdot\cdot k}$ 是张量的假设，有

$$\overline{A}^{pq}_{\cdot\cdot r} = \frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^i}\frac{\partial \overline{x}^q}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^r}A^{ij}_{\cdot\cdot k}$$

$$\overline{B}^{pq}_{\cdot\cdot r} = \frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^i}\frac{\partial \overline{x}^q}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^r}B^{ij}_{\cdot\cdot k}$$

相加：
$$(\overline{A}^{pq}_{\cdot\cdot r} + \overline{B}^{pq}_{\cdot\cdot r}) = \frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^i}\frac{\partial \overline{x}^q}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^r}(A^{ij}_{\cdot\cdot k} + B^{ij}_{\cdot\cdot k})$$

即得和为
$$\overline{S}^{pq}_{\cdot\cdot r} = \frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^i}\frac{\partial \overline{x}^q}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^r}S^{ij}_{\cdot\cdot k}$$

相减：
$$(\overline{A}^{pq}_{\cdot\cdot r} - \overline{B}^{pq}_{\cdot\cdot r}) = \frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^i}\frac{\partial \overline{x}^q}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^r}(A^{ij}_{\cdot\cdot k} - B^{ij}_{\cdot\cdot k})$$

即得差为
$$\overline{D}^{pq}_{\cdot\cdot r} = \frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^i}\frac{\partial \overline{x}^q}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^r}D^{ij}_{\cdot\cdot k}$$

显然，不能期望给表达式 $A^{ij} + B^{k}_{\cdot l}$ 以任何张量的意义，因为这样的演算不符合张量的变换律（4.31）。然而，我们可以从式（4.31）知道，同类型张量的任何线性组合（其系数为不变量）是这一类

型的张量。例如，从两个张量 $A^{rs}_{\cdot\cdot t}$ 与 $B^{rs}_{\cdot\cdot t}$ 可以构成满足式(4.31)的张量 $\alpha A^{rs}_{\cdot\cdot t}+\beta B^{rs}_{\cdot\cdot t}$，只要 α 与 β 是不变量。

例5.1 验证任一张量可以分解为对称与反对称两部分。

证： 不失普遍性，以一个二阶逆变张量为例。

$$A^{pq}=\frac{1}{2}(A^{pq}+A^{qp})+\frac{1}{2}(A^{pq}-A^{qp}) \tag{5.2}$$

而

$$R^{pq}=A^{pq}+A^{qp}=R^{qp} \qquad \text{是对称的}$$

$$S^{pq}=A^{pq}-A^{qp}=-S^{qp} \qquad \text{是反对称的}$$

所以

$$A^{pq}=\frac{1}{2}R^{pq}+\frac{1}{2}S^{pq} \qquad \text{(证毕)}$$

这个结论很容易推广到任何阶的张量。

2. 乘积

张量之间，不管其阶数是否相同，都能相乘。其乘积也是一个张量，积的阶数等于相乘因子的阶数之和。这样的乘法称为外乘，所得的乘积称为外积(outer product)。例如

$$A^{\cdot\cdot j}_{ik}=B_{ik}C^{j} \tag{5.3}$$

又如

$$T^{i\cdot\cdot jk}_{\cdot mn}=A^{i}_{\cdot m}B_{n}C^{jk} \tag{5.4}$$

注意到我们用了“·”表示上标或下标空缺的位置，习惯上最后的空位不加“·”。这样表示每一指标占有一个明确的竖列空间，今后可以看到，张量的指标次序是十分重要的。

实际上，张量

$$A^{\cdot\cdot j}_{ik}=B_{ik}C^{j} \text{ 与 } A^{j}_{\cdot ik}=C^{j}B_{ik}$$

是不相等的，因为指标的次序不同。可见，张量的乘法是不可交换的。

例5.2 设 A^{pq}_{r} 与 B^{s}_{t} 是张量，证明 $C^{pq\cdot s}_{\cdot\cdot r\cdot t}=A^{pq}_{\cdot\cdot r}B^{s}_{\cdot t}$ 也是张量。

证：

$$\overline{A}^{jk}_{\cdot\cdot l}=\frac{\partial\overline{x}^{j}}{\partial x^{p}}\frac{\partial\overline{x}^{k}}{\partial x^{q}}\frac{\partial x^{r}}{\partial\overline{x}^{l}}A^{pq}_{\cdot\cdot r}$$

$$\overline{B}^{m}_{\cdot n}=\frac{\partial\overline{x}^{m}}{\partial x^{s}}\frac{\partial x^{t}}{\partial\overline{x}^{m}}B^{s}_{\cdot t}$$

相乘
$$\overline{A}^{jk}_{\cdot\cdot l}\overline{B}^{m}_{\cdot n} = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^l}\frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^n}A^{pq}_{\cdot\cdot r}B^{s}_{\cdot t}$$

可见，$A^{pq}_{\cdot\cdot r}$ 与 $B^{s}_{\cdot t}$ 的外积 $C^{pq\cdot s\cdot}_{\cdot\cdot r\cdot t}$ 是一个三阶逆变、二阶协变的五阶张量。

§5.2　缩并与内乘

1.　缩并(contraction)

同一张量的某一上标与另一下标相同时，表示这个指标遍历 1，2，…，N，再把这 n 项求和，这种演算过程称为缩并。设一个五阶混合张量 $A^{ij}_{\cdot\cdot lmn}$，令 $n=j$ 时，则 $A^{ij}_{\cdot\cdot lmj}=A^{i}_{\cdot lm}$ 是一个三阶张量。证明如下：

$$\begin{aligned}\overline{A}^{sr}_{\cdot\cdot pqr} &= \frac{\partial \overline{x}^s}{\partial x^i}\frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^j}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^p}\frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^q}\frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^r}A^{ij}_{\cdot\cdot lmn}\\ &= \frac{\partial \overline{x}^s}{\partial x^i}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^p}\frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^q}\delta^n_j A^{ij}_{\cdot\cdot lmn}\\ &= \frac{\partial \overline{x}^s}{\partial x^i}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^p}\frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^q}A^{ij}_{\cdot\cdot lmj} \end{aligned} \tag{5.5}$$

即成为
$$\overline{A}^{s\cdot\cdot}_{\cdot pq} = \frac{\partial \overline{x}^s}{\partial x^i}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^p}\frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^q}A^{i\cdot\cdot}_{\cdot lm}$$

由上可见，一对上、下指标相同，缩并一次所得的张量，其阶数比原来的降低2阶。

缩并时，可就任何上、下标相同时便求和，因此可用缩并形成下列不同的张量：$A^{i\cdot\cdot j}_{\cdot lmj}=A^{i}_{\cdot lm}$；$A^{i\cdot j}_{\cdot ljn}=A^{i}_{\cdot ln}$；$A^{ij}_{\cdot\cdot jmn}=A^{i}_{\cdot mn}$；$A^{\cdot ij}_{li\cdot n}=A^{\cdot j}_{l\cdot n}$；$A^{ij}_{\cdot\cdot ijl}=A_l$，$A^{\cdot\cdot\cdot ij}_{nij}=A_n$，…等。特殊的例子是用缩并由混合张量 A^i_j 形成不变量 $A^i_{\cdot i}=\Phi$。可见称不变量是零阶张量是合理的。

2.　内乘

当两个张量相乘时，如果一个张量的某一上标与另一张量的

某一下标相同，即表示就这个指标遍历1，2，…，N 求和，这种演算称为两张量的内乘，得到的结果称为这两个张量的内积(inner product)，或称这两个张量的连并(transvection)。

例如

$$T^{ij} = A^{\cdot\cdot i}_{mn} B^{mjn} \tag{5.6}$$

通常把内乘理解为把与相同指标有关的 Σ 求和符号所得的相乘表达式，式(5.6)通常是表示

$$T^{ij} = \sum_{m,n=1}^{N} A^{\cdot\cdot i}_{mn} B^{mjn}$$

当然也可以表示为

$$T^{ij} = \sum_{k,l=1}^{N} A^{\cdot\cdot i}_{kl} B^{kjl}$$

因为哑标不论用什么字母，它所表示的意义都是一样的。

前面已讲过，外积(张量)的阶数等于相乘因子(张量)的阶数之和。如果相乘因子中有一对、两对、三对指标相同时，则内乘积的阶数应从相乘因子阶数总和中减去2、4、6。余此类推。

两个矢量(一阶张量)的内积是纯量(零阶张量)，例如

$$A = u^k v_k$$

应当指出，不要将同类型(上标或下标)的两个指标进行缩并或连并，因为得到的和不一定是张量。在我们的指标记法中，求和约定的两个指标总是一个上标与一个下标。

§5.3 商定律

判断一组函数是否构成张量，直接的方法就是将这些函数从一个坐标系变换到另一个坐标系时，看它们是否符合像式(4.31)的张量变换方程。但是，实际上这样做有时是很麻烦的。下面的商定律提供了判断一组函数是否构成张量的一种较为简单的检验方法。

预定理　对于一个任意张量 $B^{qn}_{\cdot\cdot r}$ 和一组27个数 $X(p,q,r)$，有 $X(p,q,r)B^{qn}=0$时，则恒有 $X(p,q,r)=0$。

证： 因 $B^{qn}_{\cdot\cdot r}$ 是一个任意张量，选择一个特殊的分量不等于零（譬如 $q=2,r=3$时），其他的分量都为零，则 $X(p,2,3)B^{2n}_{3}=0$。又因为 $B^{2n}_{3}\neq 0$，所以 $X(p,2,3)=0$。用同样的方法可对 q 与 r 的任何组合形式进行选择，将各种可能组合形式的结果进行综合，便可得 $X(p,q,r)=0$。

商定律　设 $B^{k_1\cdots k_p}_{l_1\cdots l_q}$ 是 p 阶逆变、q 阶协变的任意的混合张量，而 $X(k_1,\cdots,k_s,l_1,\cdots,l_t)$为被检定的一个数的集合（$s\geqslant q,t\geqslant p$），如果连并给出

$$X(k_1,\cdots,k_s,l_1,\cdots,l_t)B^{k_1\cdots k_p}_{l_1\cdots l_q}=C^{l_{q+1}\cdots l_t}_{k_{p+1}\cdots k_s} \tag{5.7}$$

而且所得的 C 为一 s-q 阶逆变、t-p 阶协变的混合张量，则量 X 必为 s 阶逆变、t 阶协变的混合张量。

证： 不失一般性，且为简明起见，我们就下面的特殊情况进行证明。如果

$$A^{rst}B^{m}_{\cdot rs}=C^{mt} \tag{5.8}$$

其中 $B^{m}_{\cdot rs}$ 是一任意张量，C^{mt}是张量，则 N^3个函数 A^{rst}的集形成一张量。这个张量的类型已由其指标表明。对于坐标系 $\bar{x}^i$，变换后的量应满足方程

$$\bar{A}^{rst}\bar{B}^{m}_{\cdot rs}=\bar{C}^{mt}$$

由式(4.31)可知

$$\bar{A}^{rst}\frac{\partial\bar{x}^m}{\partial x^l}\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^r}\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^s}B^{l}_{\cdot pq}=\frac{\partial\bar{x}^m}{\partial x^n}\frac{\partial\bar{x}^t}{\partial x^k}C^{nk}=\frac{\partial\bar{x}^m}{\partial x^n}\frac{\partial\bar{x}^t}{\partial x^k}A^{rsk}B^{n}_{\cdot rs}$$

改变哑指标，有

$$\frac{\partial\bar{x}^m}{\partial x^l}\left(\bar{A}^{rst}\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^r}\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^s}-A^{pqk}\frac{\partial\bar{x}^t}{\partial x^k}\right)B^{l}_{\cdot pq}=0$$

内乘以 $\partial x^i/\partial\bar{x}^m$ 得

$$\delta^i_l\left(\bar{A}^{rst}\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^r}\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^s}-A^{pqk}\frac{\partial\bar{x}^t}{\partial x^k}\right)B^{l}_{\cdot pq}=0$$

$$\left(\overline{A}^{rst}\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^s}-A^{pqk}\frac{\partial \overline{x}^t}{\partial x^k}\right)B^t_{\cdot pq}=0 \tag{5.9}$$

因为 $B^t_{\cdot pq}$是一任意张量，根据预定理可知

$$\overline{A}^{rst}\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^s}=A^{pqk}\frac{\partial \overline{x}^t}{\partial x^k} \tag{5.10}$$

内乘以$\dfrac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^p}\dfrac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^q}$，得

$$\overline{A}^{rst}\delta^i_r\delta^j_s=A^{pqk}\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^q}\frac{\partial \overline{x}^t}{\partial x^k}$$

最后得

$$\overline{A}^{ijt}=\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^q}\frac{\partial \overline{x}^t}{\partial x^k}A^{pqk}$$

可见 A^{pqk}是一个三阶逆变张量。在上面的证明里，很重要的一点就是 $B^t_{\cdot pq}$ 必须是任意的，且不能具有任何对称与反对称性质。假若 $B^t_{\cdot pq}$ 对于指标 p 与 q 是对称的，将会出现什么情况呢？如果 $B^t_{\cdot pq}$ 对于 p 与 q 是对称的，此时不能由式(5.9)得到式(5.10)。因为 $B^t_{\cdot pq}$ 不是任意的，对于 p 与 q 又是对称的，则当 $B^t_{\cdot pq}$ 的某一个分量(例如 $p=2,q=3$)不为零时，相应的分量 $B^t_{\cdot pq}$ 也不为零。这样就可得两个与式(5.10)类似的方程，将这两个方程相加，得

$$\overline{A}^{rst}\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^s}+\overline{A}^{rst}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^s}=A^{pqk}\frac{\partial \overline{x}^t}{\partial x^k}+A^{qpk}\frac{\partial \overline{x}^t}{\partial x^k}$$

改变几个哑指标，得到

$$(\overline{A}^{rst}+\overline{A}^{srt})\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^s}=(A^{pqk}+A^{qpk})\frac{\partial \overline{x}^t}{\partial x^k}$$

内乘以$\dfrac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^p}\dfrac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^q}$，得

$$(\overline{A}^{rst}+\overline{A}^{srt})\delta^i_r\delta^j_s=(A^{pqk}+A^{qpk})\frac{\partial \overline{x}^t}{\partial x^k}\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^q}$$

$$(\overline{A}^{ijt}+\overline{A}^{jit})=(A^{pqk}+A^{qpk})\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^q}\frac{\partial \overline{x}^t}{\partial x^k}$$

可见 $A^{pqk}+A^{qpk}$是三阶逆变张量。从例5.1知道，一个张量可以分解为对称与反对称两部分。上面的证明只说明了当 $B^t_{\cdot pq}$ 对于指标 p

与 q 是对称时，A^{pqk}的对称部分是对称的，而其反对称部分是否是张量，证明的结果中并未回答这一问题，因此 A^{pqk}是不是张量，此时未能作出明确判断。所以运用商定律时必须慎重。

例5.3 试证纯量场的偏导数是一个一阶协变张量。

证： 纯量的全微分

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x^k} dx^k$$

这里 $d\Phi$ 是一纯量(零阶张量)，而 dx^k 可以是一任意的逆变矢量(一阶张量)，根据商定律可知$\frac{\partial \Phi}{\partial x^k}$是一协变矢量(一阶张量)(证毕)

§5.4 度量张量

从第四章第四节我们知道，任何矢量都可以按逆变分量或协变分量的形式分解。即

$$\boldsymbol{a} = a^j \boldsymbol{g}_j \text{ 或 } \boldsymbol{a} = a_j \boldsymbol{g}^j$$

式中，$\boldsymbol{g}_i$、$\boldsymbol{g}^j$ 分别表示协变基矢量和逆变基矢量。

在斜角坐标系里，两矢量的点积(纯量积)除了可以表示为 $a^i b_i$ 外，还可以表示为

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a^i \boldsymbol{g}_i \cdot b^j \boldsymbol{g}_j = \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j a^i b^j = g_{ij} a^i b^j \tag{5.11}$$

或

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_i \boldsymbol{g}^i \cdot b_j \boldsymbol{g}^j = \boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}^j a^i b^j = g^{ij} a_i b_j \tag{5.12}$$

式中

$$g_{ij} = \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j, g^{ij} = \boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}^j \tag{5.13}$$

容易证明 g_{ij}，g^{ij}是某一张量的分量。

因为

$$\bar{\boldsymbol{g}}_m = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^m} \boldsymbol{g}_i, \quad \bar{\boldsymbol{g}}^n = \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^j} \boldsymbol{g}^j$$

所以

$$\bar{g}_{mn} = \bar{\boldsymbol{g}}_m \cdot \bar{\boldsymbol{g}}_n = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n} \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n} g_{ij}$$

$$\bar{g}^{mn} = \bar{\boldsymbol{g}}^m \cdot \bar{\boldsymbol{g}}^n = \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^j} \boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}^j = \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^j} g^{ij}$$

这就证明了 g^{ij}、g_{ij}分别是二阶逆变张量和二阶协变张量的分量。

由诸分量 g^{ij}、g_{ij}形成的张量分别称为逆变度量张量和协变度量张量。因为矢量的点乘是可交换的，所以度量张量是对称张量，即

$$g^{ij} = g^{ji}, \quad g_{ij} = g_{ji} \tag{5.14}$$

矢量 $\boldsymbol{a}$ 的长度的平方可表示为

$$|\boldsymbol{a}|^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = g_{ij}a^ia^j = g^{ij}a_ia_j \tag{5.15}$$

当我们考察坐标为 x^i 与 $x^i+\mathrm{d}x^i$ 邻近两点之间的距离时，假定两点间的矢径为 $\boldsymbol{a}$，于是 $|\boldsymbol{a}|^2$就表示这两点间的距离。

于是

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \tag{5.16}$$

式中，g_{ij}是 x^i 的函数。限定 $g=|g_{ij}|\neq0$，这样的空间称为黎曼空间(Riemannian space)。

鉴于线元 $\mathrm{d}s$ 的平方是二次形式 $g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$，所以将 $g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ 称之为度量，于是 g_{ij}又称为度量张量。用度量张量装备的空间称为度量空间，如果 g_{ij}是正定对称张量，则这个空间称为欧几里得空间。

在三维欧几里得空间里，采用笛卡尔直角坐标系，线元的平方是

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2$$

除 $g_{11}=g_{22}=g_{33}=1$以外，度量张量的所有其他分量都是零。当 $\mathrm{d}x^1=\mathrm{d}x^2=\mathrm{d}x^3=0$时，$\mathrm{d}s^2$为零，对于 $\mathrm{d}x^1$、$\mathrm{d}x^2$与 $\mathrm{d}x^3$的所有其他实值，$\mathrm{d}s^2$只会取正值。

下面考察协变度量张量 g_{ik}与逆变度量张量 g^{jk}之间的关系。

因为 $\boldsymbol{g}_i(i=1,2,\cdots,N)$、$\boldsymbol{g}^j(j=1,2,\cdots,N)$两组基矢量都是线性独立的，且 $\boldsymbol{g}_i$ 可以表为 $\boldsymbol{g}^j$ 的线性组合，令

$$\boldsymbol{g}_i = \alpha_{ij}\boldsymbol{g}^j$$

点乘以 $\boldsymbol{g}_k$ 得 $\qquad \boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_k=\alpha_{ij}\boldsymbol{g}^j\cdot\boldsymbol{g}_k=\alpha_{ij}\delta^j_k=\alpha_{ik}$

由式(5.13)可知 $\qquad g_{ik}=\alpha_{ik}$

再由 $\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}^j = g_{ik}\boldsymbol{g}^k\cdot g^{jl}\boldsymbol{g}_l = g_{ik}g^{jl}\boldsymbol{g}^k\cdot\boldsymbol{g}_l = g_{ik}g^{jl}\delta^k_l = g_{ik}g^{jk}$

因为 $$\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}^j = \delta_i^j$$

所以 $$g_{ik} g^{jk} = \delta_i^j \tag{5.17}$$

称 g^{jk} 为对称张量 g_{ik} 的逆张量。这说明协变度量张量与逆变度量张量是互逆的，或称它们是共轭张量。这个定义对于其他的二阶张量也是适用的，当然，只有当二阶张量的行列式不等于零时才有共轭张量或逆张量。

§5.5 二阶共轭对称张量

设二阶对称协变张量 A_{ij} 的行列式 $|A_{ij}| \neq 0$，令 B^{ij} 表示行列式 $|A_{ij}|$ 中元素 A_{ij} 的余因子除以 $|A_{ij}|$ 的表达式。下面证明这样得到的 B^{ij} 所形成的张量就是二阶对称协变张量 A_{ij} 的共轭张量。

根据行列式理论，有

$$A_{ij} B^{ik} = \delta_j^k$$

这里不能直接用商定律从上式来确定 B^{ik} 的张量性质，因为 A_{ij} 不是任意张量。

选择任意的逆变矢量 C^i，于是 $D_i = A_{ij} C^j$ 是一任意的协变矢量。因为 $|A_{ij}| \neq 0$，从这 N 个方程可唯一地解出用 D_i 表示 C^i 的关系式。

$$D_i B^{ik} = A_{ij} C^j B^{ik} = \delta_j^k C^j = C^k$$

现在若把商定律用于 $D_i B^{ik} = C^k$，便说明了 B^{ik} 是二阶逆变张量。

从定义可知，B^{ij} 也是对称张量。按照上面的推证方法，不难推出，B^{ik} 的共轭张量就是 A_{ij}。

将以上的结论用于度量张量，即可得

$$g_{ik} g^{jk} = \delta_i^j$$

g_{ik} 的行列式 $g = |g_{ik}| \neq 0$，则

$$g^{ik} = \frac{g_{ik}\text{ 的余因式}}{|g_{ik}|} \tag{5.18}$$

例5.4 试求柱极坐标中的协变度量张量和逆变度量张量。

解： 笛卡尔直角坐标 $\bar{x}^k$ 与柱极坐标 x^k 的关系是 $\bar{x}^1 = x^1\cos x^2, \bar{x}^2 = x^1\sin x^2, \bar{x}^3 = x^3$。

坐标变换的雅可毕为

$$\left|\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l}\right| = \begin{vmatrix} \cos x^2 & -x^1\sin x^2 & 0 \\ \sin x^2 & x^1\cos x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x^1$$

对于 $x^1 \neq 0$（即柱的心轴除外）就可解得

$$x^1 = \sqrt{(\bar{x}^1)^2 + (\bar{x}^2)^2} \qquad 0 < x^1 \leqslant \infty$$

$$x^2 = \text{arc tg}\left(\frac{\bar{x}^2}{\bar{x}^1}\right) \qquad 0 \leqslant x^2 < 2\pi$$

$$x^3 = \bar{x}^3 \qquad -\infty \leqslant x^3 \leqslant \infty$$

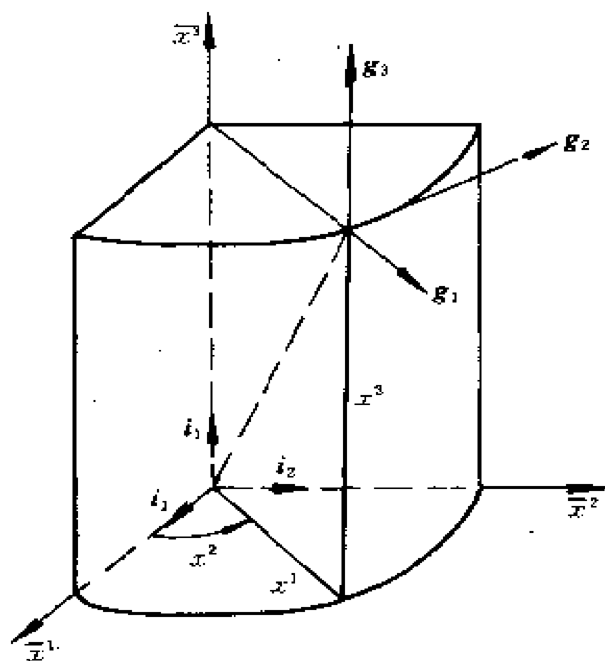


图 5.1

对于 $x^1 = 0$ 上的点，角 x^2 并不是唯一地决定的。不过，在决定这些点的位置问题上是没有影响的，因为对于 $\bar{x}^3$ 轴的各点而言，我们无须给出角度的大小。

就逆变换矩阵而言，则有

$$\left(\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k}\right) = \begin{pmatrix} \cos x^2 & \sin x^2 & 0 \\ -\frac{1}{x^1}\sin x^1 & \frac{1}{x^1}\cos x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由式(4.18)有基矢量

$$\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{i}_1\cos x^2 + \boldsymbol{i}_2\sin x^2$$

$$\boldsymbol{g}_2 = -\boldsymbol{i}_1 x^1\sin x^2 + \boldsymbol{i}_2 x^1\cos x^2$$

$$\boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{i}_3$$

代入式(5.13)，可得 $g_{11}=1, g_{22}=(x^1)^2, g_{33}=1$，其余的 $g_{12}=g_{21}=\cdots=0$，即

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由式(5.18)可得

$$g^{11} = 1, g^{22} = \left(\frac{1}{x^1}\right)^2, g^{33} = 1; g^{12} = g^{21} = \cdots = 0$$

即

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(x^1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

96BS-6王

§5.6 两矢量间的夹角、正交性

由式(5.15)有 $|\boldsymbol{a}| = (g_{kl}a^k a^l)^{1/2}$

两矢量的纯量积为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta = g_{kl}a^k b^l \tag{5.19}$$

于是两矢量之间夹角的余弦为

$$\cos\theta = \frac{g_{kl}a^k b^l}{(g_{mn}a^m a^n)^{\frac{1}{2}}(g_{rs}b^r b^s)^{\frac{1}{2}}} \tag{5.20}$$

在欧几里得空间里，g_{kl}是正定对称张量，否则，称为闵可夫斯基空间。如果是闵可夫斯基空间，可以用零锥面

$$g_{kl}x^k x^l = 0 \tag{5.21}$$

把空间分为两个域。在正域中，一切实数矢量的 $g_{kl}a^k a^l>0$（正定二次型）；在负域中，实数矢量的 $g_{kl}a^k a^l<0$，在这种情况下，两矢量之间夹角的余弦为

$$\cos\theta = \frac{\pm g_{kl}a^k b^l}{|(g_{mn}a^m a^n)^{1/2}||(g_{rs}b^r b^s)^{1/2}|}$$

分子的正负号分别对应于正负域。

由上式可知，两矢量 a^i 与 b^j 正交的必要与充分条件是

$$g_{kl}a^k b^l = 0 \tag{5.22}$$

设两矢量中恰巧有一个或都是零矢量，我们就不定义它们之间的夹角，但仍以式(5.22)作为两零矢量正交的定义，由此可知，零矢量自成正交。

§5.7 指标的升降

通过度量张量，可以建立协变矢量与逆变矢量的一一对应关系。由张量运算法则有

$$g_{ij}v^i = u_j,\ g^{ij}u_j = v^i$$

可以看到，v^i 与 u_j 是同一个量的两种表达方式，如果用相同的字母表示，则上式可写成

$$g_{ij}v^i = v_j,\ g^{ij}v_j = v^i \tag{5.23}$$

这种演算过程称为指标的上升与下降，或简称为升标与降标。v_j 称为 v^i 的相伴矢量，当然，v^i 也就是 v_j 的相伴矢量，因为一矢量与其相伴矢量的关系是互逆的。

利用相同的记号，我们有

$$g_{ij} = g_{ir}g_{js}g^{rs} \tag{5.24}$$

上式说明了把 g_{ij}和 g^{ij}两个张量用相同的字母“g”来表示是合理

的。

相伴矢量的大小(模)是相等的。证明如下：

$$g_{ij}v^iv^j = g_{ij}g^{ir}v_rg^{js}v_s = g_{ij}g^{ir}g^{js}v_rv_s$$

由式(5.24)可得 $\qquad g^{rs}=g_{ij}g^{ir}g^{js}$

所以 $$g_{ij}v^iv^j = g^{rs}v_rv_s$$

利用度量张量与一个张量内乘，可以得到这个张量的各种不同的分量。例如从张量 A^{ijk} 可形成相伴张量

$$A_p^{\cdot jk} = g_{ip}A^{ijk}, A_{p\cdot q}^{\cdot j\cdot} = g_{pi}g_{qk}A^{ijk},$$

$$A_{lmn} = g_{il}g_{jm}g_{kn}A^{ijk} \tag{5.25}$$

用"·"代替指标空缺的位置，这样使得上升或下降指标时，容易看清其对应关系，在无混淆可能的情况下，可省略"·"号。

§5.8 张量的物理分量

我们知道，一个矢量可以写为

$$\boldsymbol{v} = v^k\boldsymbol{g}_k = v_k\boldsymbol{g}^k \tag{5.26}$$

式中，$\boldsymbol{g}_k$ 是在 x^k 点上切于坐标系(k)的坐标曲线的。在这点上，$\boldsymbol{g}_k$ 组成直线坐标系，从而构成一 n 维欧几里得空间。因为一般说来，$\boldsymbol{g}_k$ 与 $\boldsymbol{g}^k$ 并不一定是单位矢量，$\boldsymbol{v}$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 上对这些矢量的平行投影 v^k 与 v_k 并没有相同的物理尺度。例如，相对于 x^k 点上的柱极坐标系，矢量 $\boldsymbol{v}$ 的分量 v^1 与 v^3 的尺寸为 L，而 v^2 的尺寸则是 $L/L=1$。这是因为基矢量 $\boldsymbol{g}_k$ 的尺寸分别由

$$|\boldsymbol{g}_1| = \sqrt{g_{11}} = 1, |\boldsymbol{g}_2| = \sqrt{g_{22}} = x^1, |\boldsymbol{g}_3| = \sqrt{g_{33}} = 1 \tag{5.27}$$

决定的。因此，有必要决定矢量与张量的物理分量。下面先研究矢量的物理分量。

我们在 x^k 上把矢量 $\boldsymbol{v}$ 向与坐标曲线相切的单位矢量 $e_{(k)}$ 投影。于是有

$$\boldsymbol{v} = v^k \boldsymbol{e}_{(k)} \tag{5.28}$$

其中
$$\boldsymbol{e}_{(k)} = \boldsymbol{g}_k / \sqrt{g_{\underline{kk}}} \tag{5.29}$$
凡相同两指标下加一"—"时，表示不求和。

$$\boldsymbol{v} = v^k \boldsymbol{g}_k = v^{(k)} \boldsymbol{e}_{(k)} = v^{(k)} \boldsymbol{g}_k / \sqrt{g_{\underline{kk}}}$$

于是
$$v^{(k)} = v^k \sqrt{g_{\underline{kk}}} \tag{5.30}$$
由式(5.30)给出的 $\boldsymbol{v}$ 的分量 $v^{(k)}$，称为矢量 $\boldsymbol{v}$ 的逆变物理分量。

同理可得矢量 $\boldsymbol{v}$ 的协变物理分量

$$v_{(l)} = v_l / \sqrt{g_{\underline{ll}}} \tag{5.31}$$

这是由于
$$\boldsymbol{e}^{(k)} \cdot \boldsymbol{e}_{(k)} = 1, \text{即 } \boldsymbol{e}^{(k)} \cdot \frac{\boldsymbol{g}_k}{\sqrt{g_{\underline{kk}}}} = 1$$

故有
$$\boldsymbol{e}_{(l)} \equiv \boldsymbol{g}_l / \sqrt{g_{\underline{ll}}}, \boldsymbol{e}^{(k)} \equiv \boldsymbol{g}^k \sqrt{g_{\underline{kk}}} \tag{5.32}$$

将物理分量的概念推广到张量中，当坐标系是正交系时，则有

$$A^{(k)(l)} = A^{kl} \sqrt{g_{\underline{kk}} g_{\underline{ll}}} \tag{5.33}$$

$$A_{(k)(l)} = A^{kl} / \sqrt{g_{\underline{kk}} g_{\underline{ll}}} \tag{5.34}$$

$$A^{(k)}_{\cdot (l)} = A^k_{\cdot l} \sqrt{g_{\underline{kk}} / g_{\underline{ll}}} \tag{5.35}$$

更一般的情况是

$$A^{(k_1) \cdots (k_n) \cdots}_{\cdots \cdots (l_1) \cdots (l_m)} = \left[\frac{g_{\underline{k_1 k_1}} \cdots g_{\underline{k_n k_n}}}{g_{\underline{l_1 l_1}} \cdots g_{\underline{l_m l_m}}} \right]^{\frac{1}{2}} A^{k_1 \cdots k_n \cdots}_{\cdots \cdots l_1 \cdots l_m} \tag{5.36}$$

§5.9　排列张量

在具有度量张量 g_{kl} 的 n 维空间里，我们定义

$$\in^{k_1 \cdots k_n} \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \in^{k_1 \cdots k_n} \tag{5.37}$$

$$\in_{l_1 \cdots l_n} \equiv \sqrt{g} \in_{l_1 \cdots l_n} \tag{5.38}$$

式中，$\in^{k_1\cdots k_n}$与$\in_{i_1\cdots i_n}$是排列符号。不失一般性，下面我们仅就三维欧几里得空间，证明$\in^{ijk}$与$\in_{ijk}$是张量。

根据行列式(用排列符号表示)的理论，有

$$\in_{ijk}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}=\in_{lmn}\left|\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s}\right| \tag{5.39}$$

基本张量从 x^i 坐标系变换到 $\bar{x}^i$ 坐标系中，有

$$\bar{g}_{lm}=\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}g_{ij} \tag{5.40}$$

它们的行列式为

$$\bar{g}=g\left|\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s}\right|^2,\sqrt{\bar{g}}=\sqrt{g}\left|\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s}\right| \tag{5.41}$$

现在将$\in_{ijk}$从坐标系 x^i 变换到坐标系 $\bar{x}^i$ 中，因为

$$\begin{aligned}\bar{\in}_{lmn}&=\sqrt{\bar{g}}\ \in_{lmn}=\sqrt{g}\ \in_{lmn}\left|\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s}\right|\\&=\sqrt{g}\ \in_{ijk}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}\end{aligned}$$

即

$$\bar{\in}_{lmn}=\in_{ijk}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} \tag{5.42}$$

可见$\in_{ijk}$是三阶协变张量。还有

$$\begin{aligned}\in^{lmn}&=\frac{1}{\sqrt{g}}\ \in_{lmn}=\frac{1}{\sqrt{\bar{g}}}\left|\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s}\right|\in_{lmn}\\&=\frac{1}{\sqrt{\bar{g}}}\ \in_{ijk}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^j}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^k}\end{aligned}$$

即

$$\in^{lmn}=\bar{\in}^{ijk}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^j}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^k} \tag{5.43}$$

可见$\in^{ijk}$是三阶逆变张量。

由排列符号的性质和排列张量的定义可知

$$\left.\begin{aligned}&\in_{ijk}=+\sqrt{g} && i,j,k\ 成偶排列\\&\in_{ijk}=-\sqrt{g} && i,j,k\ 成奇排列\\&\in_{ijk}=0 && 其他情况\end{aligned}\right\} \tag{5.44}$$

和

$$\left.\begin{aligned}
&\in^{ijk} = +\frac{1}{\sqrt{g}} \quad i,j,k\ \text{成偶排列}\\
&\in^{ijk} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \quad i,j,k\ \text{成奇排列}\\
&\in^{ijk} = 0 \qquad\quad \text{其他情况}
\end{aligned}\right\} \tag{5.45}$$

§5.10 二阶张量的本征值与本征矢量

1. 张量的矩阵记法

由式(4.18)和式(4.25)可知

$$\bar{e}_i = M_{ij}e_j, \qquad \bar{A}_i = M_{ij}A_j$$

因为 $M=(M_{ij})$是正交矩阵，所以有

$$e_i = M_{ji}\bar{e}_j, \qquad A_i = M_{ji}\bar{A}_j$$

同理，二阶协变张量的变换律式(4.29)可以写成

$$\bar{A}_{ij} = M_{ik}M_{jl}A_{kl} \tag{5.46}$$

在三维空间里，分量 A_{ij}与 $\bar{A}_{ij}$可作为两个3×3矩阵 A 与 $\bar{A}$ 的元素来排列。于是可写成

$$A = (A_{ij}), \qquad \bar{A} = (\bar{A}_{ij}) \tag{5.47}$$

这样，变换律式(5.46)可用矩阵符号写为

$$\bar{A} = MAM^T \tag{5.48}$$

对于二阶张量，特别是在研究张量的不变量、主方向以及本征值、本征矢量等内容时，采用矩阵记法是较为方便的。很多结论都可以直接取用第三章所叙述的结果。要注意的是，不要把张量 **A** 与方阵 A 混同。虽然张量 **A** 本身与坐标的选择无关，但是在不同的坐标系里，张量 **A** 有不同的矩阵表示。

下面的讨论中假定空间是欧几里得空间。

2. 本征值

定义 二阶张量 A_{ij}的本征值等于方程

$$\det(A_{ij} - \lambda g_{ij}) = 0 \tag{5.49}$$

的根。

上式是 λ 的 N 次方程。将它变换到新坐标系 $\overline{x}^i$ 时，这个方程就成为

$$\det[(\overline{A}_{pq} - \lambda\overline{g}_{pq})M_{ip}M_{jq}] = 0$$

利用行列式的乘法规则，上式可写为

$$\det(\overline{A}_{pq} - \lambda\overline{g}_{pq}) \cdot [\det(M_{ip})]^2 = 0$$

$\det(M_{ip}) \neq 0$，所以

$$\det(\overline{A}_{pq} - \lambda\overline{g}_{pq}) = 0 \tag{5.50}$$

比较式(5.49)与式(5.50)可知，张量的本征值 λ 与坐标系无关，亦即本征值是不变量。

在欧几里得空间里采用笛卡尔直角坐标系时，基本张量 g_{ij}的分量形成单位矩阵。式(5.49)可写成

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0$$

如果张量 $\boldsymbol{A}$ 是对称的，则其本征值都是实数(参看§3.4)，将这些本征值称为张量 $\boldsymbol{A}$ 的主分量或主值。用 λ_1、λ_2、λ_3表示 $\boldsymbol{A}$ 的主值，如果 λ_1、λ_2、λ_3都是正数，则 $\boldsymbol{A}$ 是正定张量。

3. 本征矢量

定义 如果有两个非零矢量 $\boldsymbol{X}^{(i)}$和 $\boldsymbol{X}_{(j)}$满足

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_{(i)}\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}^{(i)} = 0 \qquad (\text{不求和})^{①} \tag{5.51}$$

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_{(j)}\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}_{(j)} = 0 \tag{5.52}$$

则它们分别称为右本征矢量和左本征矢量，而且它们都属于同一个本征值 λ。

---

① 从(5.51)式至(5.58)式都不求和。

为了保证非零本征值的存在，式(5.51)，式(5.52)中 $\boldsymbol{X}^{(i)}$ 与 $\boldsymbol{X}_{(j)}$ 的系数行列式一定等于零，这就给出方程组(5.49)。由以上两式还可以看出，同一个二阶张量的右本征矢量和左本征矢量所对应的本征值是相等的。

设张量 $\boldsymbol{A}$ 是对称的，如果 λ_1、λ_2、λ_3 互异，则 $\boldsymbol{A}$ 的正规化本征矢量 $\boldsymbol{X}^{(1)}$、$\boldsymbol{X}^{(2)}$、$\boldsymbol{X}^{(3)}$ 是唯一的且是互相正交的。

由式(5.51)有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{(i)} = \lambda_{(i)}\boldsymbol{X}^{(i)} \quad (i = 1,2,3,\text{不求和}) \tag{5.53}$$

因为 M 是正交矩阵，等式两边左乘以 M，于是

$$MAM^TM\boldsymbol{X}^{(i)} = \overline{\boldsymbol{A}}M\boldsymbol{X}^{(i)} = \lambda_{(i)}M\boldsymbol{X}^{(i)} \qquad \text{不求和}$$

即得

$$\overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{X}}^{(i)} = \lambda_{(i)}\overline{\boldsymbol{X}}^{(i)} \tag{5.54}$$

下面证明它们是互相正交的。

将式(5.53)左乘以 $\boldsymbol{X}^{(j)T}$ 得

$$\boldsymbol{X}^{(j)T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{(i)} = \lambda_{(i)}\boldsymbol{X}^{(j)T}\boldsymbol{X}^{(i)} \tag{5.55}$$

同理有

$$\boldsymbol{X}^{(i)T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{(j)} = \lambda_{(j)}\boldsymbol{X}^{(i)T}\boldsymbol{X}^{(j)} \tag{5.56}$$

将式(5.55)转置得

$$\boldsymbol{X}^{(i)T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{(j)} = \lambda_{(i)}\boldsymbol{X}^{(i)T}\boldsymbol{X}^{(j)} \tag{5.57}$$

将式(5.57)与式(5.56)相减得

$$0 = (\lambda_{(i)} - \lambda_{(j)})\boldsymbol{X}^{(i)T}\boldsymbol{X}^{(j)} \tag{5.58}$$

因为已设 $\lambda_{(i)} \neq \lambda_{(j)}$，所以

$$\boldsymbol{X}^{(i)T}\boldsymbol{X}^{(j)} = 0 \tag{5.59}$$

可见这样的本征矢量是互相正交的。

§5.11 二阶张量的主方向与不变量

1. 主方向

如同§3.4中所述，用类似的方法将张量 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵化为对角

阵。

用正交归一的 $X^{(1)},X^{(2)},\cdots,X^{(N)}$ 组成

$$P=\begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \cdots & x_N^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_N^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(N)} & x_2^{(N)} & \cdots & x_N^{(N)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X^{(1)T} \\ X^{(2)T} \\ \vdots \\ X^{(N)T} \end{bmatrix}$$

$$P^T=(X^{(1)},X^{(2)},\cdots,X^{(N)})$$

因为 $PP^T=I$，所以 P 是正交矩阵。

将 A 进行相似变换得

$$AP^T=(AX^{(1)},AX^{(2)},\cdots,AX^{(N)})=(\lambda_{(1)}X^{(1)},\lambda_{(2)}X^{(2)},\cdots,\lambda_{(N)}X^{(N)})$$

$$\overline{A}=PAP^T=\begin{bmatrix} X^{(1)T} \\ X^{(2)T} \\ \vdots \\ X^{(N)T} \end{bmatrix}(\lambda_{(1)}X^{(1)},\lambda_{(2)}X^{(2)},\cdots,\lambda_{(N)}X^{(N)})$$

$$=\begin{bmatrix} \lambda_{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{(N)} \end{bmatrix} \tag{5.60}$$

当 $N=3$时，

$$A=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \tag{5.61}$$

因此必有这样的一个坐标系存在，对称二阶张量在这个坐标系里的分量所形成的矩阵是一对角阵，且其对角元素为 A 的主值。这个坐标系的坐标轴是 A 的主轴，它们的方向称为张量 A 的主方向。

如果 λ_1、λ_2、λ_3不都是相异的，这些结论仍能成立。如果 $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$，则矢量 $x_{(3)}$是唯一确定的，而且可取互相正交并同 $x_{(3)}$正交的

任何两单位矢量作为 $x_{(1)}, x_{(2)}$。如果 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$，则可取任何三个彼此正交的轴作为主轴，这时 A 称为球张量。

2. 不变量

(1)基本不变量

前面已经说明，A 的主值与坐标的选择无关，它们是张量的不变量。可以证明，如果 A 是对称的，则 A 的任何不变量都能用 λ_1、λ_2、λ_3来表示。就这个意义而言，它们是张量 A 的基本不变量。

§3.4已证明如果矩阵 A 的本征值为 λ，则 λ^n 是 A^n 的本征值，对于张量 A 也是如此。

(2)迹不变量

在许多应用中，取 λ_1、λ_2、λ_3的三个对称函数而不取主值本身作为不变量较为方便。三个这样的函数是

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3;\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2;\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3 \qquad (5.62)$$

这三个量显然是不变量，没有一个能用其他两个来表示，就这个意义而言，它们是独立的。

由式(5.61)可知

$$\mathrm{tr}\overline{\boldsymbol{A}}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$$

因为 P 是正交的，

$$\mathrm{tr}\overline{\boldsymbol{A}}=\overline{A}_{ii}=P_{ir}P_{is}A_{rs}=\delta_{rs}A_{rs}=A_{rr}=\mathrm{tr}\boldsymbol{A} \qquad (5.63)$$

因此式(5.62)中第一个不变量在任何坐标系里都等于 A 的分量形成的矩阵的迹。

同样

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=\mathrm{tr}\overline{\boldsymbol{A}}^2=\overline{A}_{ik}\overline{A}_{ki}=P_{ip}P_{kq}A_{pq}P_{kr}P_{is}A_{rs}$$
$$=\delta_{ps}\delta_{qr}\delta_{pq}A_{pq}A_{rs}=A_{pr}A_{rp}=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2 \qquad (5.64)$$

同样还可得

$$\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^3 \qquad (5.65)$$

因为 $\mathrm{tr}A$ 同坐标系的选择无关，所以可以定义 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=\mathrm{tr}A$，于

是也定义了 $\mathrm{tr}\bar{\boldsymbol{A}}^2=\mathrm{tr}A^2$，$\mathrm{tr}\bar{\boldsymbol{A}}^3=\mathrm{tr}A^3$。不变量的集式(5.62)可以表示成

$$\{\mathrm{tr}\boldsymbol{A},\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2,\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^3\} \tag{5.66}$$

我们称其为迹不变量。

(3)本征方程的系数是不变量

令

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \\ I_2 &= \lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2 \\ I_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{aligned}\right\} \tag{5.67}$$

显然这三个量是不变量。下面证明 I_1、I_2、I_3正是凯莱-哈密顿定理所表述的方程

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^3-I_1\boldsymbol{A}^2+I_2\boldsymbol{A}-I_3=0 \tag{5.68}$$

中的相应项的系数。

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2}[(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2-(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)] \\ &= \frac{1}{2}[(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^2-\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2] \\ &= \frac{1}{2}[(\mathrm{tr}\bar{\boldsymbol{A}})^2-\mathrm{tr}\bar{\boldsymbol{A}}^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \det\bar{\boldsymbol{A}}=\det(PAP^T) \\ &= \det P\det\boldsymbol{A}\det P^T=\det A \end{aligned}$$

因此，$\det\boldsymbol{A}=\det A=I_3$。$\boldsymbol{A}$ 的三个不变量为

$$I_1=\mathrm{tr}\boldsymbol{A},\quad I_2=\frac{1}{2}[(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^2-\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2],\quad I_3=\det\boldsymbol{A} \tag{5.69}$$

由例3.8可知，式(5.68)中的 I_1、I_2、I_3正是式(5.69)所表示的。

对式(5.68)取迹，并注意到 $\det I=3$，则有

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^3-I_1\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2+I_2\mathrm{tr}A) \\ &= \frac{1}{3}\{\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^3-\mathrm{tr}\boldsymbol{A}\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2+\frac{1}{2}[(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^2-\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2]\mathrm{tr}\boldsymbol{A}\} \\ &= \frac{1}{3}[\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^3-\frac{3}{2}\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2\mathrm{tr}\boldsymbol{A}+\frac{1}{2}(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^3] \end{aligned} \tag{5.70}$$

例5.1 求二阶对称张量 A_{ij}的本征值和本征矢量。设

$$A_{ij}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 4 & \sqrt{3}\\0 & \sqrt{3} & 6\end{bmatrix}$$

解： 本征方程为

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 0 & 0\\0 & 4-\lambda & \sqrt{3}\\0 & \sqrt{3} & 6-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(\lambda-7)(\lambda-3)=0$$

所以本征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=3,\lambda_3=7$，注意 $\lambda=3$是本征方程的重根。

对应于 $\lambda=3$的本征矢量的分量满足下列方程组

$$x_2+\sqrt{3}x_3=0,\quad \sqrt{3}x_2+3x_3=0$$

x_1任意选定。这样有可能确定两个互相正交的本征矢量。

首先我们选择 $x_1=1,x_2=0,x_3=0$，则有 $\boldsymbol{X}^{(1)}=\boldsymbol{i}$。

其次，选 $x_1=0,x_2=\sqrt{3},x_3=-1$，即 $\boldsymbol{X}^{(2)}=\sqrt{3}\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$。显然，对应于 $\lambda=3$的两个本征矢量是互相正交的。

最后，对应于 $\lambda=7$有方程组

$$-4x_1=0,\ -3x_2+\sqrt{3}x_3=0,\ \sqrt{3}x_2-x_3=0$$

解得 $x_1=0,x_2=1,x_3=\sqrt{3}$。因此 $\boldsymbol{X}^{(3)}=\boldsymbol{j}+\sqrt{3}\boldsymbol{k}$ 是对应于 $\lambda=7$ 的本征矢量。这三个本征矢量的方向表示了张量 A_{ij}的主方向。相应的主值是

$$A_{11}=A_{22}=3,\quad A_{33}=7$$

§5.12 偏张量

1. 偏张量

在连续统力学中，有时将一个张量分解为其偏量与一球张量

之和。本节我们仍然只限于在三维欧几里得空间里。

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' + \frac{1}{3}\boldsymbol{I}\,\mathrm{tr}\boldsymbol{A} \tag{5.71}$$

于是

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} - \frac{1}{3}\boldsymbol{I}\,\mathrm{tr}\boldsymbol{A} \tag{5.72}$$

将式(5.72)两边取迹，注意到 $\det\boldsymbol{I}=3$，则有

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}' = 0 \tag{5.73}$$

迹为零的张量称为偏张量。如果偏张量 $\boldsymbol{A}'$ 是对称张量，则它只有五个独立的分量，这是因为附加了迹为零这一约束条件。

2. 本征值与本征矢量

将式(5.72)右边乘以 $\boldsymbol{A}$ 的本征矢量 $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \frac{1}{3}\boldsymbol{I}\,\mathrm{tr}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\lambda - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$$

令偏张量 $\boldsymbol{A}'$ 的本征值为 $\lambda'=\lambda-\frac{1}{3}\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$，则上式表明了偏张量的本征矢量与原张量的本征矢量相同。$\boldsymbol{A}'$ 的本征值为

$$\lambda'_i = \lambda_i - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \tag{5.74}$$

3. 不变量

因为偏张量的迹为零，所以第一个不变量 $I'=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}'=0$。剩下的两个独立的不为零的不变量是 I'_2, I'_3。

$$I'_2 = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\boldsymbol{A}'^2, I'_3 = \det\boldsymbol{A}' = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\boldsymbol{A}'^3 \tag{5.75}$$

因为 $\boldsymbol{A}'^2 = (\boldsymbol{A} - \frac{1}{3}\boldsymbol{I}\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^2 = \boldsymbol{A}^2 - \frac{2}{3}\boldsymbol{A}\mathrm{tr}\boldsymbol{A} + \frac{1}{9}\boldsymbol{I}(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^2$

两边取迹

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}'^2 = \mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2 - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^2$$

于是

$$I'_2 = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2 + \frac{1}{6}(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^2$$

$$=\frac{1}{2}[(\mathrm{tr}A)^2-\mathrm{tr}A^2]-\frac{1}{3}(\mathrm{tr}A)^2=I_2-\frac{1}{3}I_1 \quad (5.76)$$

又因

$$A'^3=(A-\frac{1}{3}I\mathrm{tr}A)^3$$

$$=A^3-A^2\mathrm{tr}A+\frac{1}{3}I(\mathrm{tr}A)^2-\frac{1}{27}I(\mathrm{tr}A)^3$$

两边取迹

$$\mathrm{tr}A'^3=\mathrm{tr}A^3-\mathrm{tr}A^2\mathrm{tr}A+\frac{2}{9}(\mathrm{tr}A)^3$$

所以

$$I'_3=\frac{1}{3}\mathrm{tr}A'^3=\frac{1}{3}[\mathrm{tr}A^3-\mathrm{tr}A^2\mathrm{tr}A+\frac{2}{9}(\mathrm{tr}A)^3]$$

$$=\frac{1}{3}[\mathrm{tr}A^3-\frac{3}{2}\mathrm{tr}A^2\mathrm{tr}A+\frac{1}{2}(\mathrm{tr}A)^3]$$

$$+\frac{1}{6}\mathrm{tr}A[\mathrm{tr}A^2-(\mathrm{tr}A)^2]+\frac{2}{27}(\mathrm{tr}A)^3$$

$$=I_3-\frac{1}{3}I_1I_2+\frac{2}{27}I_1^3 \quad (5.77)$$

这样，可用 I_1、I_2、I_3表示 I'_2、I'_3，同时也可以用 I_1、I'_2、I'_3表示 I_2、I_3。所以采用集$\{I_1,I'_2,I'_3\}$作为 A 的基本不变量集，与采用集$\{I_1,I_2,I_3\}$作为 A 的基本不变量集是等价的。

本章概要

1. 张量之和(差)仍为同类型的张量。

$$C^{ij}_{\cdot\cdot k}=A^{ij}_{\cdot\cdot k}\pm B^{ij}_{\cdot\cdot k}$$

任何张量都能分解为对称与反对称的两部分。

$$A^{ij}=\frac{1}{2}(A^{ij}+A^{ji})+\frac{1}{2}(A^{ij}-A^{ji})$$

张量之间，不论其阶数如何都能相乘，外积定义为

$$A_{ik}^{\cdot\cdot j}=B_{ik}C^j$$

外积的阶数等于相乘因子的阶数之和。

2. 同一张量的某一上标与另一下标相同时，表示这个指标遍

历1，2，…，N，再把这 N 项求和，这种演算过程称为缩并。例如 $A^{\cdot\cdot\cdot j}_{\cdot imj} = A^{\cdot}_{\cdot im}$。每缩并一次，张量降阶二次。

3. 当两个张量相乘时，如果一个张量的某一上标与另一张量的某一下标相同，即表示就这个指标遍历1，2，…，N 求和，这种演算称为内乘，其结果称为内积。例如

$$A^{ij} = B^{\cdot\cdot i}_{mn} C^{mjn}$$

内积的阶数等于相乘因子阶数总和减去相同指标个数的2倍。

4. 商定律　设 $A^{rst} B^{m}_{\cdot rs} = C^{mt}$，其中 $B^{m}_{\cdot rs}$ 是一任意张量，C^{mt}是张量，则 A^{rst}是张量。

5. 协变基本张量与逆变基本张量是共轭的（或互逆的）。即
$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$
设 g_{ik}的行列式 $g = |g_{ik}| \neq 0$，则

$$g^{ik} = \frac{g_{ik}\text{ 的余因式}}{|g_{ik}|}$$

6. 线元长度　$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$
所以 g_{ij}又称为度量张量。

7. 若 $A_{ij} B^{jk} = \delta_i^k$，且 A_{ij}，B^{jk}均为对称张量，称 A_{ij}、B^{jk}为共轭对称张量。

8. 两矢量间的夹角

$$\cos\theta = \frac{g_{kl} a^k b^l}{(g_{mn} a^m a^n)^{1/2} (g_{rs} b^r b^s)^{1/2}}$$

9. 正交条件

$$g_{kl} a^k b^l = 0$$

10. 指标的升降

$$g_i = g_{ij} g^j, \quad g^i = g^{ij} g_j$$

$$v^i g_{ij} = v_j, \quad v_i g^{ij} = v^j$$

$$A^{ij} g_{jk} = A^{i}_{\cdot k}, \quad A_{ij} g^{jk} = A_i^{\cdot k}$$

$$A^{ij} g_{ik} g_{jl} = A_{kl}, \quad A_{ij} g^{ik} g^{jl} = A_{kl}$$

11. 张量的物理分量

$$v^{(k)} = v^k \sqrt{g_{\underline{kk}}}, v_{(l)} = v_l / \sqrt{g_{\underline{ll}}}$$

$$A^{(k)(l)} = A^{kl} \sqrt{g_{\underline{kk}} g_{\underline{ll}}}$$

$$A_{(k)(l)} = A_{kl} / \sqrt{g_{\underline{kk}} g_{\underline{ll}}}$$

$$A^{(k)}_{\cdot(l)} = A^k_{\cdot l} \sqrt{g_{\underline{kk}} / g_{\underline{ll}}}$$

$$A^{(k_1)\cdots(k_n)\cdots\cdots}_{\cdots\cdots(l_1)\cdots(l_n)} = \left\{ \frac{g_{\underline{k_1 k_1}} \cdots g_{\underline{k_n k_n}}}{g_{\underline{l_1 l_1}} \cdots g_{\underline{l_m l_m}}} \right\}^{\frac{1}{2}} A^{k_1 \cdots k_n \cdots\cdots}_{\cdots\cdots l_1 \cdots l_m}$$

12. 排列张量

$$\in^{k_1\cdots k_n} = \frac{1}{\sqrt{g}} \in^{k_1\cdots k_n}$$

$$\in_{l_1\cdots l_n} = \sqrt{g} \in_{l_1\cdots l_n}$$

$\in^{k_1\cdots k_n}, \in_{l_1\cdots l_n}$为排列符号。

$\in_{ijk} = + \sqrt{g}, \quad \in^{ijk} = + \dfrac{1}{\sqrt{g}}$ 　　i,j,k 成偶排列

$\in_{ijk} = - \sqrt{g}, \quad \in^{ijk} = - \dfrac{1}{\sqrt{g}}$ 　　i,j,k 成奇排列

$\in_{ijk} = 0, \varepsilon^{ijk} = 0$ 　　其他情况

13. 张量的矩阵记法

$$\overline{A}_i = M_{ij} A_j, A_i = M_{ji} \overline{A}_j$$

$$\overline{A}_{ij} = M_{ik} M_{jl} A_{kl}, \quad \overline{A} = M A M^T$$

14. 本征方程、本征值与本征矢量

本征方程　$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$

式中 $\lambda_{(i)}$是张量 $\boldsymbol{A}$ 的本征值，也称为张量的主分量或主值。

满足方程　$(\boldsymbol{A} - \lambda_{(i)} \boldsymbol{I}) \boldsymbol{X}^{(i)} = 0$

的矢量 $\boldsymbol{X}^{(i)}$称为对应于本征值 $\lambda_{(i)}$的本征矢量。

设正交归一的本征矢量组成的矩阵

$$\overline{A} = P A P^T = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N)$$

A 被化为对角矩阵，其对角元素都是 A 的主值，这样的坐标系轴称为 A 的主轴，它们的方向称为 A 的主方向。

15. 二阶张量的不变量

张量的主值是基本不变量。

迹不变量：$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$；　$\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2$；$\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3$

凯莱-哈密顿不变量：

$I_1=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$；　$I_2=\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2$；$I_3=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$

16. 偏张量　迹为零的张量称为偏张量。

$$A'=A-\frac{1}{3}I\mathrm{tr}A$$

一个张量的偏张量，其本征矢量与原张量的本征矢量相同。偏张量的本征值

$$\lambda'_i=\lambda_i-\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$$

一个张量的偏张量，其不变量与原张量的不变量的关系是

$$I'_1=0$$

$$I'_2=I_2-\frac{1}{3}I_1$$

$$I'_3=I_3-\frac{1}{3}I_1I_2+\frac{2}{27}I_1^3$$

习　题

5.1　设 A_{ij} 和 B_{ij} 是二阶协变张量，试证 $\lambda A_{ij}+\mu B_{ij}$ 是二阶协变张量，式中 λ、μ 是纯量。

5.2　试问二阶逆变对称张量最多有多少个不同的分量？设 (a) $N=4$，(b) $N=6$，(c) N 为任意数。

5.3　设张量 A^{pq}_{rs} 在一个坐标系中对于指标 p 与 q 是对称的（或反对称的），试证它在任何坐标系中对于指标 p 与 q 都是对称的（或反对称的）。

5.4 设 $A^{pq}_{\cdot\cdot rs}$ 是张量，试证 $A^{pq}_{\cdot\cdot rs}+A^{qp}_{\cdot\cdot rs}$ 是对称张量，$A^{pq}_{\cdot\cdot rs}-A^{qp}_{\cdot\cdot rs}$ 是反对称张量。

5.5 设 A_{ij}是对称张量，B_{ij}是反对称张量，试证 $A_{ij}B_{ij}=0$。

5.6 设 A^p_q 与 B_r 是张量，试证 $A^p_{\cdot q}B^r$ 与 $A^p_qB^q$ 是张量，并说明它们的阶数。

5.7 如果用 D_{ij}的对称部分 $D_{(ij)}$代替 D_{ij}，试证二次型 $D_{ij}x_ix_j$ 是不变的。

5.8 设 A^{pq}和 B_{rs}是反对称张量，试证 $C^{pq}_{rs}=A^{pq}B_{rs}$是对称的。

5.9 设 $\Phi=a_{jk}A^jA^k$，试证：总可以写出 $\Phi=b_{jk}A^jA^k$，式中 b_{jk}是对称的。

5.10 设 A_{pq}是反对称张量，试证 $A_{pq}x^px^q=0$。

5.11 试证张量 A^p_q 的缩并是纯量(或不变量)。

5.12 设 $A^{pq}_{\cdot\cdot rst}$ 是张量，选择 $p=t$ 和 $q=s$，试证缩并仍是张量，并说明它的阶数。

5.13 试证张量 A^p 与 B_q 的外积的缩并是不变量。

5.14 试建立下列相伴张量之间的关系：(a)A^{pq}与 $A_j^{\cdot q}$，(b)$A^{p\cdot r}_{\cdot q}$ 与 A_{jql} 。

5.15 试建立下列相伴张量之间的关系：(a) $A_{j\cdot l}^{\cdot k}$ 与 A^{qkr}，(b)$A^{p\cdot\cdot\cdot}_{\cdot qrs}$ 与 $A_{jqk}^{\cdot\cdot rst}$ 。

5.16 试建立下列相伴张量之间的关系：(a)A^{jkl}与 A_{pqr}，(b) $A_{pq}^{\cdot\cdot r}$ 与 $A^{jk}_{\cdot\cdot l}$ 。

5.17 试证张量 $A^p_{\cdot r}$ 与 $B^{qs}_{\cdot\cdot t}$ 的任何一对指标相同时，所求的内积是三阶张量。

5.18 试证：(a) $A_p^{\cdot q}B^p_{\cdot rs}=A^{pq}B_{prs}$，(b)$A^{pq}_{\cdot\cdot r}B_p^{\cdot r}=A_{p\cdot r}^{\cdot q}B^{pr}=A_p^{\cdot qr}B^p_{\cdot r}$ 。从而论证哑标的升降不改变该项的值这一普遍结论。

5.19 设 A^p 与 B_q 是任意张量，若 $A^pB_qC(p,q)$是不变量，试证 $C(p,q)$是一张量，并且能写成 C^q_p。

5.20 设 $A(p,q)B_q=C^p$，式中 B_q 是一任意的一阶协变张量，C^p 是一个一阶的逆变张量，试证 $A(p,q)$是一个二阶混合张量。

5.21 设 A^i 和 B^j 是任意的逆变矢量，而 $C_{ij}A^iB^j$ 是不变量，试证 C_{ij}是二阶协变张量。

5.22 设 A^i 是任意的逆变矢量，而 $C_{ij}A^iA^j$ 是不变量，试证 $C_{ij}+C_{ji}$是二阶协变张量。

5.23 设 $\mathrm{d}s^2=g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ 是不变量，试证 g_{ij}是二阶对称协变张量。

5.24 试求球极坐标系中的度量张量。

5.25 (a)用第二行的元素及其余因式展开行列式

$$g=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$，(b)试证 $g=g_{jk}G(j,k)$，式中 $G(j,k)$ 是 g_{jk} 的余因式，该式仅对指标 k 求和。

5.26 试证：(a)$g_{21}G(3,1)+g_{22}G(3,2)+g_{23}G(3,3)=0$，(b)若 $j\neq p$，$g_{jk}G(p,k)=0$。

5.27 定义 $g^{jk}=\dfrac{G(j,k)}{g}$，式中 $G(j,k)$ 是行列式 $g=|g_{jk}|\neq 0$ 中元素 g_{jk} 的余因式，试证 $g_{jk}g^{pk}=\delta_j^p$。

5.28 试证在正交坐标系里 $g_{11}=\dfrac{1}{g^{11}}$，$g_{22}=\dfrac{1}{g^{22}}$，$g_{33}=\dfrac{1}{g^{33}}$。

5.29 设矢量 v_i 用基矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表为 $v_i=\alpha a_i+\beta b_i+\gamma c_i$，试证 $\alpha=\dfrac{\epsilon_{ijk}v_ib_jc_k}{\epsilon_{pqr}a_pb_qc_r}$，$\beta=\dfrac{\epsilon_{ijk}a_iv_jc_k}{\epsilon_{pqr}a_pb_qc_r}$，$\gamma=\dfrac{\epsilon_{ijk}a_ib_jv_k}{\epsilon_{pqr}a_pb_qc_r}$。

5.30 设两组坐标系的轴间夹角如表所示，试求其变换系数，并证明它们是互相正交的。

	x^1	x^2	x^3
$\bar{x}^1$	135°	60°	120°
$\bar{x}^2$	90°	45°	45°
$\bar{x}^3$	45°	60°	120°

5.31 设 $\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}^j=\delta_i^j$，则 $\boldsymbol{a}^1,\boldsymbol{a}^2,\boldsymbol{a}^3$ 称为基矢 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 的互逆基矢(不一定是单位矢量)。试建立构成互逆基矢的必要关系，并计算下列矢量的逆矢：

$$\boldsymbol{b}_1=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j},\boldsymbol{b}_2=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

5.32 试证 g_{pq}，g^{pq} 与 δ_q^p 是相伴张量。

5.33 设 $\mathrm{d}s^2=5(\mathrm{d}x^1)^2+3(\mathrm{d}x^2)^2+4(\mathrm{d}x^3)^2-6\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2+4\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$，试求 g 与 g^{jk}。

5.34 设 $\mathrm{d}s^2=3(\mathrm{d}x^1)^2+2(\mathrm{d}x^2)^2+4(\mathrm{d}x^3)^2-6\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^3$，试求 g 与 g^{jk}。

5.35 (a)设 A^p 与 B^q 是矢量，试证 $g_{pq}A^pB^q$ 是不变量，(b)再证 $\dfrac{g_{pq}A^pB^q}{\sqrt{(A^pA_p)(B^qB_q)}}$ 是不变量。

5.36 两组笛卡尔直角坐标轴间夹角的方向余弦部分地列于表中，如果 $\bar{x}^1$、$\bar{x}^2$、$\bar{x}^3$ 也是右手系，试填写表的最下一行的空格。

5.37　试证三维空间里曲线坐标之间夹角的余弦为

$$\cos\theta_{12}=\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}},\quad \cos\theta_{23}=\frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}g_{33}}},\quad \cos\theta_{31}=\frac{g_{31}}{\sqrt{g_{33}g_{11}}}$$

5.38　试证三维空间里正交坐标系的 $g_{12}=g_{23}=g_{31}=0$。

	x^1	x^2	x^3
$\bar{x}^1$	3/5	−4/5	0
$\bar{x}^2$	0	0	1
$\bar{x}^3$			

5.39　试证 $L^2=g_{pq}A^pA^q$ 是不变量。

5.40　试证上题中 $L^2=g^{pq}A_pA_q$。

5.41　设 $A_j=g_{jk}A^k$，试证 $A^k=g^{jk}A_j$。

5.42　设 $A^k=g^{jk}A_j$，试证 $A_j=g_{jk}A^k$。

5.43　计算柱极坐标系的共轭基本张量。

5.44　计算球极坐标系的共轭基本张量。

5.45　试将下列变换方程写成矩阵形式：(a)协变矢量的变换方程，(b)二阶逆变张量的变换方程($N=3$)。

5.46　试将下列变换方程写成矩阵形式：(a)逆变矢量的变换方程，(b)二阶协变张量的变换方程，(c)二阶混合张量的变换方程($N=3$)。

5.47　设二阶对称张量 A_{ij}的矩阵表示形式为

$$(A_{ij})=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

试求它的本征值与本征矢量。

5.48　设二阶对称张量的矩阵$(A_{ij})=\begin{pmatrix}7 & 3 & 0\\ 3 & 7 & 4\\ 0 & 4 & 7\end{pmatrix}$，试求它的主值和主轴方向。

5.49　将5.47题中张量 A_{ij}化为对角形。

5.50　计算张量$\boldsymbol{B}=(B_{ij})=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$的平方根$\sqrt{\boldsymbol{B}}$。

5.51　设张量$\boldsymbol{A}=(A_{ij})=\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ -1 & 4 & 0\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix}$，利用 $\boldsymbol{A}^2$与 $\boldsymbol{A}$ 的主轴重合

这一结论，求 $\boldsymbol{A}$ 的平方根 $\sqrt{\boldsymbol{A}}$。

5.52 设张量 $\boldsymbol{B}=(B_{ij})=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$，利用凯莱-哈密顿定理求 $(\boldsymbol{B})^4$。

第六章　张量分析

§6.1　克里斯托菲符号

为便于讨论张量分析和空间的曲率，必须引入由基本张量 g_{ij} 形成的两个重要符号，即第一种和第二种克里斯托菲符号(Christoffel symbol)。

1.　定义

第一种克里斯托菲符号：

$$[ij,k]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^{j}}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^{i}}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{k}}\right) \tag{6.1}$$

第二种克里斯托菲符号：

$$\begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix}=g^{lk}[ij,k]^{*} \tag{6.2}$$

引入的这两种符号，是否是张量，待讨论了它们的变换律即可断定。两种符号中的指标除一个(如 l)看作是上标外，其余的都看作下标，它们适用于一个上标和一个下标的求和约定。

将式(6.2)内乘以 g_{lm}，得

$$[ij,m]=g_{lm}\begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix} \tag{6.3}$$

从定义可知，这两种符号对于 i,j 都是对称的，即

---

* 有不少书籍，尤其是欧洲的书籍，用 $\Gamma_{k,ij}$ 和 Γ^{l}_{ij} 表示第一种和第二种克里斯托菲符号，即 $\Gamma_{k,ij}=[ij,k]$，$\Gamma^{l}_{ij}=\begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix}$。

$$[ij,k]=[ji,k],\quad \begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} l \\ ji \end{Bmatrix} \tag{6.4}$$

于是在 N 维黎曼空间 R_N 中，都各有$\dfrac{N^2(N+1)}{2}$个独立的分量，例如，对于 $N=3$而言，$[ij,k]$有18个独立分量：

$[11,1],[11,2],[11,3],\ [12,1]=[21,1],\ [23,1]=[32,1],\ [31,1]=[13,1],$
$[22,1],[22,2],[22,3],\ [12,2]=[21,2],\ [23,2]=[32,2],\ [31,2]=[13,2],$
$[33,1],[33,2],[33,3],\ [12,3]=[21,3],\ [23,3]=[32,3],\ [31,3]=[13,3]$

对于$\begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix}$也类似地有18个独立的分量。

2. 用克里斯托菲符号表示基本张量的导数

(1)由式(6.1)有

$$[ij,k]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

改变哑标
$$[kj,i]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\right)$$

因为 g_{ij}是对称张量，将以上两式相加，得

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}=[ij,k]+[kj,i] \tag{6.5}$$

(2)因为
$$g_{ij}g^{ik}=\delta_j^k$$

对 x^l 微分，得

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}g^{ik}+\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}g_{ij}=0$$

内乘以 g^{jm}，有

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}g_{ij}g^{jm}=\frac{\partial g^{mk}}{\partial x^l}=-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}g^{ik}g^{jm}$$

将式(6.5)和式(6.2)代入上式，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial g^{mk}}{\partial x^l}&=-g^{ik}g^{jm}[il,j]-g^{ik}g^{jm}[jl,i]\\&=-g^{ik}\begin{Bmatrix} m \\ il \end{Bmatrix}-g^{jm}\begin{Bmatrix} m \\ jl \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial g^{mk}}{\partial x^l} = -g^{ik}\begin{Bmatrix} m \\ il \end{Bmatrix} - g^{im}\begin{Bmatrix} m \\ il \end{Bmatrix} \tag{6.6}$$

例6.1 试证$\begin{Bmatrix} j \\ jm \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x^m}\ln\sqrt{g}$。

证： g_{jk}的行列式$g=|g_{jk}|=g_{jk}G(j,k)$（仅对k求和）而g_{jk}的余因式$G(j,k)=g^{jk}g$。

注意到$G(j,k)$中不包含g_{jk}，所以

$$\frac{\partial g}{\partial g_{jr}} = G(j,r)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x^m} &= \frac{\partial g}{\partial g_{jr}}\frac{\partial g_{jr}}{\partial x^m} = G(j,r)\frac{\partial g_{jr}}{\partial x^m} \\ &= g\,g^{jr}\frac{\partial g_{jr}}{\partial x^m} = g\,g^{jr}([jm,r]+[rm,j]) \\ &= g\left(\begin{Bmatrix} j \\ jm \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r \\ rm \end{Bmatrix}\right) = 2g\begin{Bmatrix} j \\ jm \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

于是
$$\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^m} = \begin{Bmatrix} j \\ jm \end{Bmatrix} \text{或} \begin{Bmatrix} j \\ jm \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x^m}\ln\sqrt{g} \tag{6.7}$$

（证毕）

3. 克里斯托菲符号的变换律

协变基本张量g_{ij}的变换关系是

$$\bar{g}_{lm} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}g_{ij} \tag{6.8}$$

将上式对$\bar{x}^n$求偏导数，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{g}_{lm}}{\partial \bar{x}^n} &= \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^l\partial \bar{x}^n}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}g_{ij} \\ &\quad + \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^m\partial \bar{x}^n}g_{ij}\end{aligned} \tag{a}$$

轮换指标l,m,n和i,j,k，并适当改变哑标，得两个类似的方程。

$$\frac{\partial \bar{g}_{nl}}{\partial \bar{x}^m} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^n\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}g_{ki}$$

$$+\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^l\partial \bar{x}^m}g_{ki} \tag{b}$$

$$\frac{\partial \bar{g}_{mn}}{\partial \bar{x}^l} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^m\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}g_{jk}$$

$$+\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^n\partial \bar{x}^l}g_{jk} \tag{c}$$

$\frac{(b)+(c)-(a)}{2}$得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{g}_{nl}}{\partial \bar{x}^m}+\frac{\partial \bar{g}_{mn}}{\partial \bar{x}^l}-\frac{\partial \bar{g}_{lm}}{\partial \bar{x}^n}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}$$

$$+g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l\partial \bar{x}^m}$$

$$\overline{[lm,n]}=[ij,k]\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}+g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l\partial \bar{x}^m} \tag{6.9}$$

逆变基本张量 g^{rs} 的变换关系是

$$\bar{g}^{np}=g^{rs}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^r}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^s} \tag{6.10}$$

将式(6.9)的两边内乘以式(6.10)的相应两边，化简后得

$$\overline{\begin{Bmatrix}p\\lm\end{Bmatrix}}=\begin{Bmatrix}s\\ij\end{Bmatrix}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^s}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}+\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l\partial \bar{x}^m} \tag{6.11}$$

式(6.9)与式(6.11)给出了两种克里斯托菲符号的变换律，符号上方的横线表示它是在坐标系 $\bar{x}^i$ 里对于基本张量 $\bar{g}_{ij}$ 计算的。变换关系表明两种克里斯托菲符号都不是张量。可是在坐标的线性变换中，当 $\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l\partial \bar{x}^m}=0$ 这种十分特殊的情况下，这两种符号的变换律就像张量的变换律一样。

将式(6.11)的两边内乘以 $\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p}$，得

$$\frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^l\partial \bar{x}^m}=\overline{\begin{Bmatrix}p\\lm\end{Bmatrix}}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p}-\begin{Bmatrix}r\\ij\end{Bmatrix}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} \tag{6.12}$$

这是用 x^r 对 $\bar{x}^i$ 的一阶偏导数和第二种克里斯托菲符号表示

二阶偏导数的一个重要方程，以后常用到这个关系。

§6.2 矢量的协变微分

在研究矢量的协变导数之前，先考察基矢量 $\boldsymbol{g}_k$ 与 $\boldsymbol{g}^k$ 的协变导数。

协变基矢量 $\boldsymbol{g}_k$ 的协变导数是

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial x^l} = \begin{Bmatrix} m \\ kl \end{Bmatrix} \boldsymbol{g}_m \tag{6.13}$$

逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^k$ 的协变导数是

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}^k}{\partial x^l} = - \begin{Bmatrix} k \\ lm \end{Bmatrix} \boldsymbol{g}^m \tag{6.14}$$

先证明式(6.13)。借助于三维图形，如图6.1所示，列出两组基矢量之间的变换关系如下：

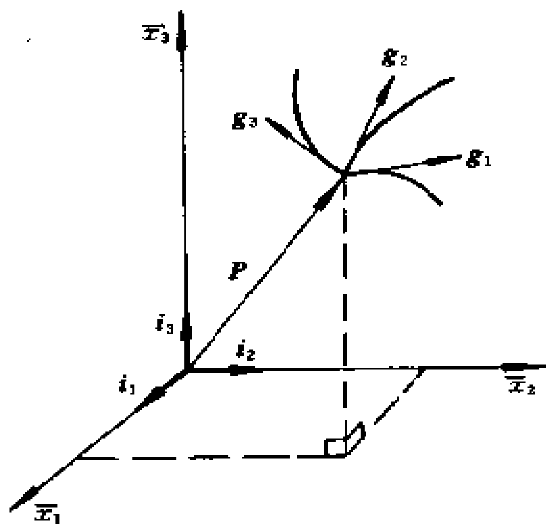


图 6.1

$$\boldsymbol{g}_k = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}\boldsymbol{i}_j, \quad \boldsymbol{i}_j = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}\boldsymbol{g}_k \tag{6.15}$$

$$g_{kl} = \boldsymbol{g}_k \cdot \boldsymbol{g}_l = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l}\delta_{ji} \tag{6.16}$$

$$\boldsymbol{g}^k = g^{kl}\boldsymbol{g}_l, \quad \boldsymbol{g}_k = g_{kl}\boldsymbol{g}^l \tag{6.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^l}\boldsymbol{g}_k = \frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^l \partial x^k}\boldsymbol{i}_j = \frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^l \partial x^k}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j}\boldsymbol{g}_m$$

即
$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial x^l} = \begin{Bmatrix} m \\ kl \end{Bmatrix} \boldsymbol{g}_m$$

下面只需证明

$$\begin{Bmatrix} m \\ kl \end{Bmatrix} = \frac{\partial^2 \overline{x}^l}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^l}$$

将式(6.16)代入式(6.1),得

$$\begin{aligned}
[kl,m] &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^k} \frac{\partial \overline{x}^s}{\partial x^m} \delta_{rs} \right) + \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^l} \frac{\partial \overline{x}^s}{\partial x^m} \delta_{rs} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x^m}\left(\frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^k} \frac{\partial \overline{x}^s}{\partial x^l} \delta_{rs} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \overline{x}^r}{\partial x^l \partial x^m} \frac{\partial \overline{x}^s}{\partial x^m} \delta_{rs} + \frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^k} \frac{\partial^2 \overline{x}^s}{\partial x^l \partial x^m} \delta_{rs} \right. \\
&\quad + \frac{\partial^2 \overline{x}^r}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial \overline{x}^s}{\partial x^m} \delta_{rs} + \frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^l} \frac{\partial^2 \overline{x}^s}{\partial x^k \partial x^m} \delta_{rs} \\
&\quad \left. - \frac{\partial^2 \overline{x}^r}{\partial x^m \partial x^k} \frac{\partial \overline{x}^s}{\partial x^l} \delta_{rs} - \frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^k} \frac{\partial^2 \overline{x}^s}{\partial x^m \partial x^l} \delta_{rs} \right)
\end{aligned}$$

容易看出,第2项与第6项相消;由于 $\delta_{rs} = \delta_{sr}$,所以第4项与第5项相消,于是上式可以写成

$$[kl,m] = \frac{\partial^2 \overline{x}^r}{\partial x^l \partial x^k} \frac{\partial \overline{x}^s}{\partial x^m} \delta_{rs}$$

由式(6.2),有

$$\begin{Bmatrix} m \\ kl \end{Bmatrix} = g^{mn}[kl,n] = g^{mn} \frac{\partial^2 \overline{x}^r}{\partial x^l \partial x^k} \frac{\partial \overline{x}^s}{\partial x^n} \delta_{rs}$$

但是

$$\begin{aligned}
g^{mn} \frac{\partial \overline{x}^s}{\partial x^n} \delta_{rs} &= \frac{\partial \overline{x}^s}{\partial x^n} \frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^p} \frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^q} \delta^{pq} \delta_{rs} \\
&= \frac{\partial \overline{x}^s}{\partial \overline{x}^q} \frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^p} \delta^{pq} \delta_{rs} = \frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^r}
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{Bmatrix} m \\ kl \end{Bmatrix} = \frac{\partial^2 \overline{x}^r}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^r}$$

这就证明了式(6.13)。下面再证明式(6.14)。

由于式(6.17),有

$$g^{km} = g^{kp}g^{mn}g_{pn}$$

所以 g^{km} 对 x^l 的偏导数为

$$\frac{\partial g^{km}}{\partial x^l} = \frac{\partial g^{kp}}{\partial x^l} g^{mn} g_{pn} + g^{kp}\frac{\partial g^{mn}}{\partial x^l} g_{pn} + g^{kp}g^{mn}\frac{\partial g_{pn}}{\partial x^l}$$

$$= \frac{\partial g^{kp}}{\partial x^l} g^{m}_{\cdot p} + \frac{\partial g^{mn}}{\partial x^l} g^{k}_{\cdot n} + g^{kp}g^{mn}\frac{\partial g_{pn}}{\partial x^l}$$

$$= 2\frac{\partial g^{pm}}{\partial x^l} + g^{kp}g^{mn}\frac{\partial g_{pn}}{\partial x^l}$$

于是,得

$$\frac{\partial g^{km}}{\partial x^l} = - g^{kp}g^{mn}\frac{\partial g_{pn}}{\partial x^l} \tag{a}$$

又由式(6.17)有

$$\boldsymbol{g}^k = g^{km}\boldsymbol{g}_m$$

所以有

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}^k}{\partial x^l} = \frac{\partial g^{km}}{\partial x^l}\boldsymbol{g}_m + g^{km}\frac{\partial \boldsymbol{g}_m}{\partial x^l} = \frac{\partial g^{km}}{\partial x^l}\boldsymbol{g}_m + g^{kn}\frac{\partial \boldsymbol{g}_n}{\partial x^l}$$

将式(a)及式(6.13)代入上式,得

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}^k}{\partial x^l} = - g^{kp}g^{mn}\frac{\partial g_{pn}}{\partial x^l}\boldsymbol{g}_m + g^{kn}\begin{Bmatrix} m \\ nl \end{Bmatrix}\boldsymbol{g}_m$$

$$= \left(- g^{kp}g^{mn}\frac{\partial g_{pn}}{\partial x^l} + g^{kn}g^{ms}[nl,s]\right)\boldsymbol{g}_m$$

$$= \left(- g^{kp}g^{mn}\frac{\partial g_{pn}}{\partial x^l} + g^{kp}g^{mn}[pl,n]\right)\boldsymbol{g}_m$$

$$= \left(- g^{kp}\frac{\partial g_{pn}}{\partial x^l} + g^{kp}[pl,n]\right)\boldsymbol{g}^n$$

$$= g^{kp}\left(- \frac{\partial g_{pn}}{\partial x^l} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pn}}{\partial x^l} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ln}}{\partial x^p} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pl}}{\partial x^n}\right)\boldsymbol{g}^n$$

$$= - g^{kp}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pn}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{pl}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{ln}}{\partial x^p}\right)\boldsymbol{g}^n$$

$$= - g^{kp}[ln,p]\boldsymbol{g}^n = - \begin{Bmatrix} k \\ ln \end{Bmatrix}\boldsymbol{g}^n$$

这就证明了式(6.14)。*

现在研究矢量的协变导数。

(1)将矢量 u 写成 $\boldsymbol{u}=u^k\boldsymbol{g}_k$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^l}=\frac{\partial u^k}{\partial x^l}\boldsymbol{g}_k+u^k\frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial x^l}=\left(\frac{\partial u^k}{\partial x^l}+\begin{Bmatrix}k\\lm\end{Bmatrix}u^m\right)\boldsymbol{g}_k$$

记
$$u^k_{,l}=\frac{\partial u^k}{\partial x^l}+\begin{Bmatrix}k\\lm\end{Bmatrix}u^m \tag{6.18}$$

$u^k_{,l}$称为逆变矢量 u^k 的协变偏导数。

特别地

$$u^k_{,k}=\frac{\partial u^k}{\partial x^k}+\begin{Bmatrix}k\\jk\end{Bmatrix}u^j=\frac{\partial u^k}{\partial x^k}+u^j\frac{\partial}{\partial x^j}(\ln\sqrt{g})$$

于是
$$u^k_{,k}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}(\sqrt{g}\,u^j) \tag{6.19}$$

(2)将矢量 u 写成 $\boldsymbol{u}=u_k\boldsymbol{g}^k$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^l}=\frac{\partial u_k}{\partial x^l}\boldsymbol{g}^k+u_k\frac{\partial \boldsymbol{g}^k}{\partial x^l}=\left(\frac{\partial u_k}{\partial x^l}-\begin{Bmatrix}m\\kl\end{Bmatrix}u_m\right)\boldsymbol{g}^k$$

记
$$u_{k,l}=\frac{\partial u_k}{\partial x^l}-\begin{Bmatrix}m\\kl\end{Bmatrix}u_m \tag{6.20}$$

$u_{k,l}$称为协变矢量 u_k 的协变偏导数。

最后证明协变偏导数的张量性质。

因为
$$A^k=\overline{A}^j\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^j} \tag{6.21}$$

将此变换律对 x^j 求偏导数,得

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^j}=\frac{\partial \overline{A}^i}{\partial \overline{x}^n}\frac{\partial \overline{x}^n}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i}-\overline{A}^i\frac{\partial^2 x^k}{\partial \overline{x}^i\partial \overline{x}^n}\frac{\partial \overline{x}^n}{\partial x^j}$$

利用式(6.12)消除二阶偏导数,得

---

* 式(6.13)与式(6.14)的证明引自 A. C. Eringen 著,钱伟长译《张量分析》(现代连续统物理丛书1)一书中的译注(99页)。

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^j}=\frac{\partial \overline{A}^i}{\partial \overline{x}^n}\frac{\partial \overline{x}^n}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i}+\overline{A}^i\frac{\partial \overline{x}^n}{\partial x^j}\left(\overline{\begin{Bmatrix}p\\in\end{Bmatrix}}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^p}-\begin{Bmatrix}h\\rs\end{Bmatrix}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^n}\right)$$

由式(6.21)并适当改变哑指标，方程化为

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^j}+\begin{Bmatrix}k\\rj\end{Bmatrix}A^r=\left(\frac{\partial \overline{A}^i}{\partial \overline{x}^n}+\overline{\begin{Bmatrix}i\\rn\end{Bmatrix}}\overline{A}^r\right)\frac{\partial \overline{x}^n}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i}$$

即
$$A^k_{,j}=\overline{A}^i_{,n}\frac{\partial \overline{x}^n}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i}\tag{6.22}$$

此式表明 A^k 对 x^j 的协变偏导数是二阶混合张量。

又因为
$$\overline{A}_i=A_j\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i}\tag{6.23}$$

将此式对 $\overline{x}^l$ 求偏导数，得

$$\frac{\partial \overline{A}_i}{\partial \overline{x}^l}=\frac{\partial A_j}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i}+A_j\frac{\partial^2 x^j}{\partial \overline{x}^i\partial \overline{x}^l}$$

再用式(6.12)消除二阶偏导数，并适当改变哑指标，将式(6.23)代入后经过演算得

$$\frac{\partial \overline{A}_i}{\partial \overline{x}^l}-\overline{\begin{Bmatrix}m\\il\end{Bmatrix}}\overline{A}_m=\frac{\partial A_j}{\partial x^n}-\begin{Bmatrix}r\\jn\end{Bmatrix}A_r\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^l}$$

即
$$\overline{A}_{i,l}=A_{j,n}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^l}\tag{6.24}$$

此式表明 A_j 对 x^n 的协变偏导数是二阶协变张量。

在 N 维欧几里得空间里，如果选用的坐标系是笛卡尔直角坐标系，除了 $g_{11}=g_{22}=\cdots=g_{NN}=1$外，基本张量 g_{ij}的其他分量都为零，所有的克里斯托菲符号都为零。于是协变偏导数就和一般的偏导数相同，协变微分法就化为一般的偏微分法。然而，即使是在欧几里得空间，如果采用球极坐标系，则克里斯托菲符号便不都等于零。

§6.3　张量的协变微分

上节我们讨论了矢量的协变微分法，得出了含有矢量偏导数

的张量。这样的协变微分法能否推广于张量?本节将作出肯定的回答。为了不失普遍性,选择二阶混合张量 A^i_j 为例,因为这个张量既有逆变指标又有协变指标,因此它具有普遍意义。

$$\overline{A}^i_j = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j}A^k_l$$

将上式内乘以$\frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^i}$,得

$$\overline{A}^i_j \frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^i} = A^m_l \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j} \tag{6.25}$$

对 $\overline{x}^k$ 微分,并利用式(6.12)消去二阶偏导数,得

$$\frac{\partial \overline{A}^i_j}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^i} + \overline{A}^i_j\left[\overline{\begin{Bmatrix} p \\ ik \end{Bmatrix}}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^p} - \begin{Bmatrix} m \\ rs \end{Bmatrix}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^k}\right]$$

$$= \frac{\partial A^m_l}{\partial x^t}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j} + A^m_l\left(\overline{\begin{Bmatrix} p \\ jk \end{Bmatrix}}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^p} - \begin{Bmatrix} l \\ rs \end{Bmatrix}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^k}\right)$$

用式(6.25)并适当改变哑指标,方程化为

$$\left(\frac{\partial \overline{A}^i_j}{\partial \overline{x}^k} + \overline{A}^n_p\overline{\begin{Bmatrix} i \\ nk \end{Bmatrix}} - \overline{A}^i_p\overline{\begin{Bmatrix} p \\ jk \end{Bmatrix}}\right)\frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^i}$$

$$= \left(\frac{\partial A^m_l}{\partial x^t} + A^r_l\begin{Bmatrix} m \\ rt \end{Bmatrix} - A^m_r\begin{Bmatrix} r \\ lt \end{Bmatrix}\right)\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j}$$

引入逗号记法:

$$A^m_{l,t} \equiv \frac{\partial A^m_l}{\partial x^t} + A^r_l\begin{Bmatrix} m \\ rt \end{Bmatrix} - A^m_r\begin{Bmatrix} r \\ lt \end{Bmatrix} \tag{6.26}$$

于是上面的方程化为

$$\overline{A}^i_{j,k}\frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^i} = A^m_{l,t}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j}$$

内乘以$\frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^m}$,得

$$\overline{A}^r_{j,k} = A^m_{l,t}\frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^m}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^k} \tag{6.27}$$

可见,$A^m_{l,t}$是三阶混合张量。这个张量称为 A^m_l 对 x^t 的协变导数。

用类似的方法，可以推得二阶逆变张量的协变导数是三阶混合张量，而二阶协变张量的协变导数是三阶协变导数，即

$$A^{kl}_{\cdot,m} \equiv \frac{\partial A^{kl}}{\partial x^m} + A^{rl}\begin{Bmatrix} k \\ mr \end{Bmatrix} + A^{kr}\begin{Bmatrix} l \\ mr \end{Bmatrix} \tag{6.28}$$

$$\overline{A}^{rs}_{\cdot,t} = A^{kl}_{\cdot,m} \frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^k} \frac{\partial \overline{x}^s}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^t} \tag{6.29}$$

$$A_{kl,m} \equiv \frac{\partial A_{kl}}{\partial x^m} - A_{rl}\begin{Bmatrix} r \\ km \end{Bmatrix} - A_{kr}\begin{Bmatrix} r \\ lm \end{Bmatrix} \tag{6.30}$$

$$\overline{A}_{rs,t} = A_{kl,m} \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^r} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^s} \frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^t} \tag{6.31}$$

对于一般的高阶张量，可写出如下的表达式

$$A^{p_1\cdots p_s}_{q_1\cdots q_t,n} \equiv \frac{\partial A^{p_1\cdots p_s}_{q_1\cdots q_t}}{\partial x^n} + \sum_{\alpha=1}^{s}\begin{Bmatrix} p_\alpha \\ kn \end{Bmatrix} A^{p_1\cdots p_{\alpha-1}kp_{\alpha+1}\cdots p_s}_{q_1\cdots q_t}$$

$$- \sum_{\beta=1}^{t}\begin{Bmatrix} l \\ q_\beta n \end{Bmatrix} A^{p_1\cdots p_s}_{q_1\cdots q_{\beta-1}lq_{\beta+1}\cdots q_t}$$

这个张量称为张量 $A^{p_1\cdots p_s}_{q_1\cdots q_t}$ 对 x^n 的协变导数。

下面研究两个特殊的张量，即克罗内克 δ^k_l 和吕奇(Ricci)基本张量 g_{kl}、g^{kl}的协变导数。

根据式(6.25)，有

$$\begin{aligned} \delta^k_{l,m} &= \frac{\partial \delta^k_l}{\partial x^m} + \begin{Bmatrix} k \\ rm \end{Bmatrix}\delta^r_l - \begin{Bmatrix} r \\ lm \end{Bmatrix}\delta^k_r \\ &= 0 + \begin{Bmatrix} k \\ lm \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} k \\ lm \end{Bmatrix} = 0 \end{aligned} \tag{6.32}$$

可见，在计算含有 δ^k_l 的项的协变导数时，克罗内克符号 δ^k_l 尤如一常数，它本身的协变导数为零。

下面证明吕奇基本张量 g_{kl}、g^{kl}的协变导数为零，即

$$g_{kl,m} = 0, \quad g^{kl}_{\cdot,m} = 0 \tag{6.33}$$

根据式(6.30)和式(6.2)，有

$$g_{kl,m}=\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}-g_{rl}\begin{Bmatrix} r \\ km \end{Bmatrix}-g_{kr}\begin{Bmatrix} r \\ lm \end{Bmatrix}$$

$$=\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}-g_{rl}g^{rs}[km,s]-g_{kr}g^{rs}[lm,s]$$

$$=\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}-[km,l]-[lm,k]$$

$$=\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{km}}{\partial x^l}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l}-\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k}\right)=0$$

因为 $$g^{kr}g_{rl}=\delta^k_l$$

将上式对 x^m 求协变导数(求协变导数的规则见下节),得

$$g^{kr}_{,m}g_{rl}+g^{kr}g_{rl,m}=0$$

根据刚才的证明,可知第二项为零。即

$$g^{kr}_{,m}g_{rl}=0$$

因为 $\det(g_{kl})\neq 0$,这组线性方程组的唯一解为

$$g^{kr}_{,m}=0$$

至此,式(6.33)的两式证毕。

§6.4 协变微分法规则

协变导数的演算遵循下列规则:

1. 两张量之和(或差)的协变导数是它们的协变导数之和(或差)。

$$(A^{kl}+B^{kl})_{,m}=A^{kl}_{,m}+B^{kl}_{,m} \tag{6.34}$$

将(6.28)代人上式两端,即可证明等式的成立。

2. 两张量的外积(或内积)的协变导数等于两项之和,每项是一个张量外乘(或内乘)另一张量的协变导数,即

$$(A^{ij}B_{lm})_{,k} = A^{ij}_{,k}B_{lm} + A^{ij}B_{lm,k} \tag{6.35}$$

$$(A^{il}_{j}B^{m}_{l})_{,k} = A^{il}_{j,k}B^{m}_{l} + A^{il}_{j}B^{m}_{l,k} \tag{6.36}$$

证(只证式(6.35)):

$$\begin{aligned}(A^{ij}B_{lm})_{,k} &= \frac{\partial}{\partial x^k}(A^{ij}B_{lm}) - A^{pj}\begin{Bmatrix} i \\ pk \end{Bmatrix}B_{lm} + A^{ip}\begin{Bmatrix} j \\ pk \end{Bmatrix}B_{lm} \\ &\quad - A^{ij}B_{pm}\begin{Bmatrix} p \\ lk \end{Bmatrix} - A^{ij}B_{lp}\begin{Bmatrix} p \\ mk \end{Bmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial A^{ij}}{\partial x^k} + A^{pj}\begin{Bmatrix} i \\ pk \end{Bmatrix} + A^{ip}\begin{Bmatrix} j \\ pk \end{Bmatrix}\right)B_{lm} \\ &\quad + A^{ij}\left(\frac{\partial B_{lm}}{\partial x^k} - B_{pm}\begin{Bmatrix} p \\ lk \end{Bmatrix} - B_{lp}\begin{Bmatrix} p \\ mk \end{Bmatrix}\right) \\ &= A^{ij}_{,k}B_{lm} + A^{ij}B_{lm,k}\end{aligned}$$

(证毕)

3. 进行协变微分演算时,g_{kl}、g^{kl}和 δ^k_l 可以像常数一样提出来,例如

$$(g^{ij}A_{il})_{,m} = g^{ij}_{,m}A_{il} + g^{ij}A_{il,m} = g^{ij}A_{il,m}$$

§6.5 不变微分算子

1. 梯度

由 §2.4可知,纯量场 Φ 的梯度可以表为

$$\mathrm{grad}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x^k}\boldsymbol{g}^k = \nabla\Phi \tag{6.37}$$

式中哈密顿算子

$$\nabla \equiv \boldsymbol{g}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{6.38}$$

张量 $\boldsymbol{A}$ 的梯度定义为

$$\mathrm{grad}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_{,n}\boldsymbol{g}^n \tag{6.39}$$

若张量 $\boldsymbol{A}$ 为三阶混合张量 $A^{k}_{\cdot lm}$,则其梯度的分量为

$$(\mathrm{grad}\boldsymbol{A})^{k}_{\cdot lmn} = A^{k}_{\cdot lm,n} = \nabla_n A^{k}_{\cdot lm} \tag{6.40}$$

式中符号∇_n表示协变微分算子。

2. 散度

根据式(2.36)和式(6.19),矢量 $\boldsymbol{a}$ 的散度为

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{a} &= \nabla \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}^k \cdot \frac{\partial}{\partial x^k}(a^l \boldsymbol{g}_l) \\ &= \boldsymbol{g}^k \cdot \boldsymbol{g}_l a^l_{,k} = a^k_{,k} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}\, a^k) \qquad (6.41)\end{aligned}$$

即逆变矢量 a^l 的散度

$$\operatorname{div} a^l = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}\, a^k) \qquad (6.42)$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}^k \cdot \frac{\partial}{\partial x^k}(a_l \boldsymbol{g}^l) = g^{kl} \frac{\partial a_l}{\partial x^k} \qquad (6.43)$$

即协变矢量 a_l 的散度

$$\operatorname{div} a_l = g^{kl} \frac{\partial a_l}{\partial x^k} \qquad (6.44)$$

张量的散度可以定义为一上标与代表协变微分的下标缩并后所得的结果,例如:$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{g}^l \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x^l} = \boldsymbol{g}^l \cdot B^{kj}_{\cdot\cdot m;l} \boldsymbol{g}_k \boldsymbol{g}_j \boldsymbol{g}^m = B^{lj}_{\cdot\cdot m;l}\, \boldsymbol{g}_j \boldsymbol{g}^m$,或 $\boldsymbol{B} \cdot \nabla = \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x^l} \boldsymbol{g}^l = B^{kjm}_{\cdot\cdot\cdot;l}\, \boldsymbol{g}_k \boldsymbol{g}_j \boldsymbol{g}_m \boldsymbol{g}^l = B^{kjl}_{\cdot\cdot;k} \boldsymbol{g}_k \boldsymbol{g}_j$。

不过,散度都只是指张量中的最后一个上标与代表协变微分的下标缩并的情况,如

$$\begin{aligned}(\operatorname{div} A)^{k_1 \cdots k}{}_{l_1 \cdots l_q} &= A^{k_1 \cdots k}{}_{l_1 \cdots l_q, m}^{m} \\ &= \nabla_m A^{k_1 \cdots k}{}_{l_1 \cdots l_q}^{m} \qquad (6.45)\end{aligned}$$

对于对称张量而言,被缩并的上标的位置并不重要。

例6.2 设 $\boldsymbol{u}$ 为一矢量,Φ 为纯量,试证

$$\operatorname{div}\Phi\boldsymbol{u} = \Phi \operatorname{div}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \Phi$$

证:

$$\operatorname{div}\Phi\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k}(\Phi u^k \sqrt{g})$$

$$=\frac{\Phi}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(u^k\sqrt{g})+u^k\frac{\partial\Phi}{\partial x^k}$$

$$=\Phi\mathrm{div}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\Phi \qquad \text{(证毕)}(6.46)$$

3. 旋度

由§2.6可知，矢量场 $\boldsymbol{u}$ 的旋度为

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{u}=\nabla\times\boldsymbol{u}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3}\\ u_1 & u_2 & u_3\end{vmatrix}=e_{ijk}\boldsymbol{e}_i\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

分量为 $\frac{\partial u_p}{\partial x^q}-\frac{\partial u_q}{\partial x^p}=\left(\frac{\partial u_p}{\partial x^q}-\begin{Bmatrix}s\\pq\end{Bmatrix}u_s\right)-\left(\frac{\partial u_q}{\partial x^p}-\begin{Bmatrix}s\\pq\end{Bmatrix}u_s\right)$

$$=u_{p,q}-u_{q,p} \qquad (6.47)$$

用张量形式表示 N 维空间里矢量（一阶张量）$\boldsymbol{u}$ 的旋度为

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{u}=\nabla\times\boldsymbol{u}=\boldsymbol{g}^k\times\frac{\partial}{\partial x^k}(u_l\boldsymbol{g}^l)=\boldsymbol{g}^k\times\boldsymbol{g}^l u_{l,k}$$

$$=\in^{klm}u_{l,k}\boldsymbol{g}_m \qquad (6.48)$$

4. 拉普拉斯算子

由式(2.51)可知

$$\nabla^2\Phi=\mathrm{div}\ \mathrm{grad}\Phi=\mathrm{div}\ \nabla\Phi$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,g^{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}\right)$$

$$=g^{ij}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}\right)_{,i}$$

$$=g^{ij}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^i\partial x^j}-\frac{\partial\Phi}{\partial x^k}\begin{Bmatrix}k\\ij\end{Bmatrix}\right) \qquad (6.49)$$

若 Φ 与 Ψ 是两个纯量，则

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\Phi\Psi)=\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}+\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}$$

得 $$\nabla(\Phi\Psi)=\Phi\nabla\Psi+\Psi\nabla\Phi$$

两端取散度得

$$\nabla^2(\Phi\Psi)=\Phi\nabla^2\Psi-2\nabla\Phi\cdot\nabla\Psi+\Psi\nabla^2\Phi \quad (6.50)$$

§6.6 内禀微分

考虑沿曲线 $x^k=x^k(t)$ 的矢量场，如果矢量场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 是参数 t 的函数，且是可微的，则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x^l}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t} \quad (6.51)$$

因为 $$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x^l}=u^k_{\cdot,l}\boldsymbol{g}_k$$

所以 $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=u^k_{\cdot,l}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{g}_k\equiv\frac{\delta u^k}{\delta t}\boldsymbol{g}_k \quad (6.52)$$

由式(5.18)可知

$$\frac{\delta u^k}{\delta t}=\left(\frac{\partial x^k}{\partial x^l}+\begin{Bmatrix}k\\lm\end{Bmatrix}u^m\right)\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t}$$

即 $$\frac{\delta u^k}{\delta t}=\frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}t}+\begin{Bmatrix}k\\lm\end{Bmatrix}u^m\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t} \quad (6.53)$$

称 $\frac{\delta u^k}{\delta t}$ 为 u^k 对 t 的绝对导数或内禀导数。

对于纯量有

$$\frac{\delta\Phi}{\delta t}=\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \quad (6.54)$$

对于二阶张量 $A^i_{\cdot j}$，有

$$\frac{\delta A^i_{\cdot j}}{\delta t}=\frac{\mathrm{d}A^i_j}{\mathrm{d}t}+\begin{Bmatrix}i\\km\end{Bmatrix}A^k_{\cdot j}\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}t}-\begin{Bmatrix}m\\kj\end{Bmatrix}A^i_{\cdot m}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} \quad (6.55)$$

对于高阶张量 $A^{p_1p_2\cdots p_s}_{q_1q_2\cdots q_t}$，有

$$\frac{\delta A^{p_1p_2\cdots p_s}_{q_1q_2\cdots q_t}}{\delta t}=A^{p_1p_2\cdots p_s}_{q_1q_2\cdots q_t,k}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} \quad (6.56)$$

可见，张量的内禀导数是和原来的张量同阶且同类型的张量。

容易定义高阶内禀导数，例如

$$\frac{\delta^2 A^i_j}{\delta t^2}=\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta A^i_j}{\delta t}\right)=\left(A^i_{j,k}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}\right)_{,l}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t} \tag{6.57}$$

内禀微分法一般是不交换的。

基本张量 g_{kl}、g^{kl}的内禀导数为零，即

$$\frac{\delta g_{kl}}{\delta t}=\frac{\delta g^{kl}}{\delta t}=0 \tag{6.58}$$

由定义可知，内禀导数的运算遵循协变微分法的运算法则。

若矢量 $\boldsymbol{u}$ 又和 t 显式相关，即

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) \tag{6.59}$$

则有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\bigg|_x+\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x^l}\bigg|_t\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t}\\&=\left(\frac{\partial u^k}{\partial t}+u^k_{,l}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t}\right)\boldsymbol{g}_k\end{aligned}$$

引入符号

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{D}u^k}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{g}_k \tag{6.60}$$

用下式定义矢量$\frac{\mathrm{D}u^k}{\mathrm{D}t}$为 u^k 的实质导数(material derivative)：

$$\frac{\mathrm{D}u^k}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial u^k}{\partial t}\bigg|_x+u^k_{,l}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t} \tag{6.61}$$

上式显然可以推广到高阶张量。例如，对于二阶张量 $A^i_j(\boldsymbol{X},t)$ 而言，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}A^i_j}{\mathrm{D}t}&=\frac{\partial A^i_j}{\partial t}\bigg|_x+A^i_{j,k}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{\partial A^i_j}{\partial t}+\frac{\delta A^i_j}{\delta t}\end{aligned} \tag{6.62}$$

从上式可以明显地看出内禀导数与实质导数的区别以及它们之间的联系。

因为基本张量 g_{kl}、g^{kl}与 t 没有显式关系，故有

$$\frac{\mathrm{D}g_{kl}}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}g^{kl}}{\mathrm{D}t} = 0 \tag{6.63}$$

同算子$\frac{\delta}{\delta t}$一样，算子$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$的运算遵循协变微分法的运算法则。

§6.7　相对张量

定义　如果 $p+q$ 阶张量 $A^{k_1\cdots k_p}_{l_1\cdots l_q}$（权为 ω）服从坐标变换律

$$\overline{A}^{r_1\cdots r_p}_{s_1\cdots s_q} = \left|\frac{\partial \overline{x}}{\partial x}\right|^{-\omega} \frac{\partial \overline{x}^{r_1}}{\partial x^{k_1}}\cdots\frac{\partial \overline{x}^{r_p}}{\partial x^{k_p}}\frac{\partial x^{l_1}}{\partial \overline{x}^{s_1}}\cdots\frac{\partial x^{l_q}}{\partial \overline{x}^{s_q}}A^{k_1\cdots k_p}_{l_1\cdots l_q} \tag{6.64}$$

则这个张量称为权为 ω 的相对张量。

雅可毕行列式

$$J = \det\left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial x}\right) = \left|\frac{\partial \overline{x}}{\partial x}\right| \tag{6.65}$$

所以，式(6.64)可写成

$$\overline{A}^{r_1\cdots r_p}_{s_1\cdots s_q} = J^{-\omega} \frac{\partial \overline{x}^{r_1}}{\partial x^{k_1}}\cdots\frac{\partial \overline{x}^{r_p}}{\partial x^{k_p}}\frac{\partial x^{l_1}}{\partial \overline{x}^{s_1}}\cdots\frac{\partial x^{l_q}}{\partial \overline{x}^{s_q}}A^{k_1\cdots k_p}_{l_1\cdots l_q} \tag{6.66}$$

指数 ω 是一个数。权为1的相对张量称为张量密度；权为零的张量称为绝对张量。前面各章中所讨论的张量，均属于绝对张量。

权为 ω 的相对纯量、相对矢量、相对二阶混合张量分别为

$$\overline{\Phi} = \left|\frac{\partial \overline{x}}{\partial x}\right|^{-\omega}\Phi \tag{6.67}$$

$$\overline{A}^i = \left|\frac{\partial \overline{x}}{\partial x}\right|^{-\omega}\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j}A^j \tag{6.68}$$

$$\overline{A}_i = \left|\frac{\partial \overline{x}}{\partial x}\right|^{-\omega}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i}A_j \tag{6.69}$$

$$\overline{A}^i_j = \left|\frac{\partial \overline{x}}{\partial x}\right|^{-\omega}\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j}A^k_l \tag{6.70}$$

可以看到，把雅可毕行列式 J 的$(-\omega)$次方乘绝对张量，得相对张量；反之，用 J^{ω} 乘权为 ω 的相对张量，即得绝对张量。

$\sqrt{g}$ 是权为1的相对张量（张量密度）。

证：
$$\bar{g}_{ij} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} g_{pq}$$

两边取行列式

$$\bar{g} = \left| \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \right| \left| \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} \right| g = \left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right|^2 g$$

所以
$$\sqrt{\bar{g}} = \left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right|^{-1} \sqrt{g} \qquad (6.71)$$

（证毕）

物体的体积元 $\mathrm{d}V$ 是纯量密度，即零阶张量密度的一个范例。这是因为体积元 $\mathrm{d}V$ 是按下述规律进行坐标变换的，

$$\mathrm{d}V(\bar{x}) = \left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right| \mathrm{d}V(x) \qquad (6.72)$$

这就说明 $\mathrm{d}V$ 是权为（－1）的纯量密度。

相对张量的加法、减法、外（内）乘、缩并等的运算与绝对张量的运算相同。

本章概要

1. 克里斯托菲符号

第一种克里斯托菲符号

$$[ij,k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)$$

第二种克里斯托菲符号

$$\begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix} = g^{lk}[ij,k]$$

又
$$[ij,m] = g_{lm}\begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix}$$

2. 用克里斯托菲符号表示基本张量的导数

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = [ij,k] + [kj,i]$$

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^j} = -g^{lk}\begin{Bmatrix} i \\ lj \end{Bmatrix} - g^{li}\begin{Bmatrix} i \\ lj \end{Bmatrix}$$

又

$$\begin{Bmatrix} i \\ ij \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x^j}\ln\sqrt{g}$$

3. 克里斯托菲符号的变换律

$$\overline{[lm,n]} = [ij,k]\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} + g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m}$$

$$\overline{\begin{Bmatrix} p \\ lm \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} s \\ ij \end{Bmatrix}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^s}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} + \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m}$$

4. 基矢量的协变导数

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial x^l} = \begin{Bmatrix} m \\ kl \end{Bmatrix}\boldsymbol{g}_m, \quad \frac{\partial \boldsymbol{g}^k}{\partial x^l} = -\begin{Bmatrix} k \\ lm \end{Bmatrix}\boldsymbol{g}^m$$

5. 矢量的协变导数

逆变矢量的协变导数

$$u^k_{,l} = \frac{\partial u^k}{\partial x^l} + \begin{Bmatrix} k \\ lm \end{Bmatrix}u^m$$

$$u^k_{,k} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}(\sqrt{g}\,u^j)$$

协变矢量的协变导数

$$u_{k,l} = \frac{\partial u_k}{\partial x^l} - \begin{Bmatrix} m \\ kl \end{Bmatrix}u_m$$

矢量的协变导数是二阶张量。

$$\overline{A}^k_{,j} = A^i_{,n}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}$$

$$\overline{A}_{k,j} = A_{i,n}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j}$$

6. 张量的协变导数

$$A^{kl}_{\cdot m} = \frac{\partial A^{kl}}{\partial x^m} + A^{rl}\begin{Bmatrix} k \\ mr \end{Bmatrix} + A^{kr}\begin{Bmatrix} l \\ mr \end{Bmatrix}$$

$$A_{kl,m} = \frac{\partial A_{kl}}{\partial x^m} - A_{rl}\begin{Bmatrix} r \\ km \end{Bmatrix} - A_{kr}\begin{Bmatrix} r \\ lm \end{Bmatrix}$$

$$A^k_{l,m} = \frac{\partial A^k_l}{\partial x^m} + A^r_l\begin{Bmatrix} k \\ mr \end{Bmatrix} - A^k_r\begin{Bmatrix} r \\ lm \end{Bmatrix}$$

$$A^{p_1\cdots p_s}_{q_1\cdots q_t,m} = \frac{\partial A^{p_1\cdots p_s}_{q_1\cdots q_t}}{\partial x^m} + \sum_{\alpha=1}^{s}\begin{Bmatrix} p_\alpha \\ k_m \end{Bmatrix} A^{p_1\cdots p_{\alpha-1}Rp_{\alpha+1}\cdots p_s}_{q_1\cdots q_t}$$

$$- \sum_{\beta=1}^{t}\begin{Bmatrix} l \\ q_\beta m \end{Bmatrix} A^{p_1\cdots p_s}_{q_1\cdots q_{\beta-1}lq_{\beta+1}\cdots q_t}$$

$$\delta^k_{l,m} = 0, \quad g^{kl}_{\cdot m} = 0, \quad g_{kl,m} = 0$$

7. 协变微分法服从和的微分与乘积的微分的一般规律。

8. 不变微分算子

梯度

$$(\mathrm{grad}\boldsymbol{A})^k_{\cdot lmn} = A^k_{\cdot lm,n} = \nabla_n A^k_{\cdot lm}$$

散度

$$\mathrm{div}A^l = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}A^k)$$

$$\mathrm{div}A_l = g^{kl}\frac{\partial A_l}{\partial x^k}$$

$$(\mathrm{div}\boldsymbol{A})^{k_1\cdots k_p m}_{\cdots\cdots l_1\cdots l_q,m} = A^{k_1\cdots k_p m}_{\cdots\cdots l_1\cdots l_q,m}$$

$$= \nabla_m{}^{k_1\cdots k_p m}_{\cdots\cdots l_1\cdots l_q}$$

旋度

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{u} = \nabla\times\boldsymbol{u} = \in^{klm}u_{m,l}\boldsymbol{g}_k$$

$$u_{p,q} - u_{q,p} = \frac{\partial u_p}{\partial x^q} - \frac{\partial u_q}{\partial x^p}$$

拉普拉斯算子

$$\nabla^2\Phi = g^{ij}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^i\partial x^j} - \frac{\partial\Phi}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}\right)$$

9. 内禀微分(绝对导数)

$$\frac{\delta u^k}{\delta t}=\frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}t}+\begin{Bmatrix}k\\lm\end{Bmatrix}u^m\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\delta A^i_j}{\delta t}=\frac{\mathrm{d}A^i_j}{\mathrm{d}t}+\begin{Bmatrix}i\\km\end{Bmatrix}A^k_j\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}t}-\begin{Bmatrix}m\\kj\end{Bmatrix}A^i_m\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\delta g_{kl}}{\delta t}=\frac{\delta g^{kl}}{\delta t}=0$$

10. 实质导数

$$\frac{\mathrm{D}u^k}{\mathrm{D}t}=\left.\frac{\partial u^k}{\partial t}\right|_x+u^k_{,l}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{D}A^i_j}{\mathrm{D}t}=\left.\frac{\partial A^i_j}{\partial t}\right|_x+A^i_{j,k}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial A^i_j}{\partial t}+\frac{\delta A^i_j}{\delta t}$$

$$\frac{\mathrm{D}g_{kl}}{\mathrm{D}t}=\frac{\mathrm{D}g^{kl}}{\mathrm{D}t}=0$$

11. 相对张量

权为 ω 的相对纯量、相对矢量、相对二阶混合张量分别是

$$\overline{\Phi}=\left|\frac{\partial\overline{x}}{\partial x}\right|^{-\omega}\Phi$$

$$\overline{A}^i=\left|\frac{\partial\overline{x}}{\partial x}\right|^{-\omega}\frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^j}A^j$$

$$\overline{A}_i=\left|\frac{\partial\overline{x}}{\partial x}\right|^{-\omega}\frac{\partial x^j}{\partial\overline{x}^i}A_j$$

$$\overline{A}^i_j=\left|\frac{\partial\overline{x}}{\partial x}\right|^{-\omega}\frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial\overline{x}^j}A^k_l$$

$\sqrt{g}$是权为1的相对张量(张量密度),即$\sqrt{\overline{g}}=\left|\frac{\partial\overline{x}}{\partial x}\right|^{-1}\sqrt{g}$。

习　　题

6.1 试证 (i)$[ij,k]=[ji,k]$,(ii)$\begin{Bmatrix}k\\ij\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}k\\ji\end{Bmatrix}$。

6.2　试证$[ij,k]=g_{kl}\begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix}$。

6.3　试证$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=[ik,j]+[jk,i]$。

6.4　试证$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}=-g^{il}\begin{Bmatrix} j \\ kl \end{Bmatrix}-g^{jl}\begin{Bmatrix} i \\ kl \end{Bmatrix}$。

6.5　计算：当 $i\neq j$ 时，$g_{ij}=0$空间里的第一种克里斯托菲符号。

6.6　计算：当 $i\neq j$ 时，$g_{ij}=0$空间里的第二种克里斯托菲符号。

6.7　试求：(i)笛卡尔直角坐标系，(ii)柱极坐标系，(iii)球极坐标系中的第二种克里斯托菲符号。

6.8　试求：(i)笛卡尔直角坐标系，(ii)柱极坐标系，(iii)球极坐标系中的第一种克里斯托菲符号。

6.9　计算度量为 $ds^2=(dx^1)^2-[(x^2)^2-(x^1)^2](dx^2)^2$时的第二种克里斯托菲符号。

6.10　计算克里斯托菲符号，相应的度量为

(i)$ds^2=(dx^1)^2+(x^1)^2(dx^2)^2+(x^1)^2\sin^2x^2(dx^3)^2$，

(ii)$ds^2=(dx^1)^2+G(x^1,x^2)(dx^2)^2$，其中 G 是 x^1和 x^2的函数。

6.11　试证$\frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^j\partial \bar{x}^k}=\overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^n}-\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\begin{Bmatrix} m \\ pq \end{Bmatrix}$。

6.12　试求下列张量相对于 x^q 的协变导数：(i)$g_{jk}A^k$，(ii)A^jB_k，(iii)$\delta^j_kA_j$。

6.13　试求下列张量相对于 x^q 的协变导数：(i)A_{jk}，(ii)A^{jk}，(iii)A^j_k，(iv)A^j_{kl}，(v)A^{jkl}_{mn}。

6.14　试求下列张量相对于 x^q 的协变导数：(i) $A^{jk}_{\cdot\cdot l}$，(ii)$A^{jk}_{\cdot\cdot lm}$，(iii)$A^{j}_{\cdot klm}$，(iv)$A^{jkl}_{\cdot\cdot\cdot m}$，(v)$A^{jk}_{\cdot\cdot lmn}$。

6.15　设 A_p 是张量，试证 $A_{p,q}\equiv\frac{\partial A_p}{\partial x^q}-\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}A_s$ 是张量。

6.16　设 A^p 是张量，试证 $A^p_{,q}\equiv\frac{\partial A^p}{\partial x^q}+\begin{Bmatrix} p \\ qs \end{Bmatrix}A^s$ 是张量。

6.17　试证：(i)g_{jk}，(ii)g^{jk}，(iii)δ^j_k 的协变导数为零。

6.18　试证

$$A^{ij}_{,j}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}(A^{ij}\sqrt{g})+A^{jk}\begin{Bmatrix} i \\ j\ k \end{Bmatrix},$$

$$A^{j}_{\cdot i,j} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}(A^j_{\cdot i}\sqrt{g}) - A^j_k\begin{Bmatrix} k \\ i\ j \end{Bmatrix}。$$

6.19　试求 $A^i_k B^{lm}_n$ 相对于 x^q 的协变导数。

6.20　若 A_{ij}为一协变矢量的旋度，试证

$$A_{ij,k} + A_{jk,i} + A_{ki,j} = 0$$

6.21　试证$(g_{jk}A^{km}_{\cdot\cdot n})_{,q} = g_{jk}A^{km}_{\cdot\cdot n,q}$ 。

6.22　利用关系式 $A^j = g^{jk}A_k$，从 A_k 的协变导数求 A^j 的协变导数。

6.23　在柱极坐标系中，试用逆变矢量 A^p 的物理分量表示 A^p 的散度 $\mathrm{div}A^p$。

6.24　在球极坐标系里，试用 A^p 的物理分量表示 $\mathrm{div}A^p$。

6.25　在(i)柱极坐标系，(ii)球极坐标系里计算 $\nabla^2\Phi$。

6.26　试证 $\mathrm{div}A_j = \dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial}{\partial x^r}(\sqrt{g}\,g^{rk}A_k) = \mathrm{div}A^j$。

6.27　设下列张量是 t 的可导函数，试求它们的内禀导数：(i)不变量 Φ，(ii) A^j，(iii)$A^j_{\cdot k}$，(iv)$A^{jk}_{\cdot\cdot lmn}$ 。

6.28　试求(i)$g_{jk}A^k$，(ii)$\delta^j_k A_j$，(iii)$g_{jk}\delta^j_r A^r_p$ 的内禀导数。

6.29　设下列张量是 t 的可导函数，试求这些张量场的内禀导数：(i)A_k，(ii)A^{jk}，(iii)A_jB^k，(iv) $\Phi A^j_{\cdot k}$ (Φ 是不变量)。

6.30　试证$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g^{ij}A_iA_j) = 2g^{ij}A_i\dfrac{\delta A_j}{\delta t}$。

6.31　设 $A^p_{\cdot q}$ 与 $B^{rs}_{\cdot\cdot t}$ 分别是权为 ω_1与 ω_2的相对张量，试证它们的内积与外积是权为 $\omega_1+\omega_2$的相对张量。

6.32　设 $A^{pq}_{\cdot\cdot r}$ 是权为 ω 的相对张量，试证 $g^{-\frac{\omega}{2}}A^{pq}_{\cdot\cdot r}$ 是绝对张量。

6.33　试证两个权数相同的张量的和与差，是与原张量同类型、同权数的相对张量。

6.34　设 $A(p,q)B^{qs}_{\cdot\cdot r} = C^s_{\cdot pr}$，式中 B^{qs}_r 是权为 ω_1 的任意相对张量，$C^s_{\cdot pr}$ 是一已知的权为 ω_2的相对张量，试证 $A(p,q)$是权为 $\omega_2-\omega_1$的相对张量(这就是相对张量的商定律)。

第七章　黎曼空间的曲率

§7.1　黎曼-克里斯托菲张量

由微积分理论知，在一般情况下，混合偏导数的次序是可以交换的，即

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^k \partial x^j}$$

人们很自然地会问：张量的二阶协变偏导数的次序是否在一般情况下也可以交换？若不能，在什么条件下才可以交换？下面就研究绝对协变矢量 A_i 的二阶协变偏导数的次序交换问题。

由式(6.20)有

$$A_{i,j} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix} A_r$$

再求一次协变导数，由式(6.30)有

$$\begin{aligned} A_{i,jk} &= \frac{\partial}{\partial x^k}(A_{i,j}) - \begin{Bmatrix} r \\ ik \end{Bmatrix} A_{r,j} - \begin{Bmatrix} r \\ jk \end{Bmatrix} A_{i,r} \\ &= \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial A_i}{\partial x^r}\begin{Bmatrix} r \\ jk \end{Bmatrix} - \frac{\partial A_r}{\partial x^j}\begin{Bmatrix} r \\ ik \end{Bmatrix} - \frac{\partial A_r}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix} \\ &\quad - A_r \frac{\partial}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix} - A_r \begin{Bmatrix} r \\ sj \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ ik \end{Bmatrix} + A_r \begin{Bmatrix} r \\ is \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ jk \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{7.1}$$

互换指标 j 与 k 并将两式相减得

$$A_{i,jk} - A_{i,kj} = R^r_{\cdot ijk} A_r \tag{7.2}$$

式中

$$R^r_{\cdot ijk} = \frac{\partial}{\partial x^j}\begin{Bmatrix} r \\ ik \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r \\ sj \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ ik \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} r \\ sk \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ ij \end{Bmatrix} \tag{7.3}$$

因 A_r 是一任意协变矢量，根据商定律，可知 $R^r_{\cdot ijk}$ 是一四阶混合张

量，它完全是由基本张量 g_{ij} 及其一、二阶偏导数构成的，称之为黎曼-克里斯托菲张量，或称为具有黎曼度量 $g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ 的曲率张量，有人将符号 R^l_{ijk} 称为第二种黎曼符号。这个张量与矢量 A_i 的选取无关。

由式(7.2)可以看出，所有矢量的协变微分法可交换的必要与充分条件是黎曼-克里斯托菲张量恒为零，这就是对本节开始提出的问题的回答。

由式(7.3)的定义可知：

$$R^l_{.ijk} = -R^l_{.ikj} \tag{7.4}$$

所以黎曼-克里斯托菲张量对于指标 j 与 k 是反对称的。还可看出

$$R^l_{.ijk} + R^l_{.jki} + R^l_{.kij} = 0 \tag{7.5}$$

对一任意逆变矢量 A^i 连续求两次协变导数，演算步骤与上述完全相同，可以得到

$$A^i_{,jk} - A^i_{,kj} = -R^i_{.rjk}A^r \tag{7.6}$$

§7.2 曲率张量

由

$$R_{lijk} = g_{lr}R^r_{ijk} \tag{7.7}$$

所确定的四阶协变张量 R_{lijk} 称之为协变曲率张量。有人将符号 R_{lijk} 称为第一种黎曼符号。

将式(7.3)代入式(7.7)得

$$R_{lijk} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(g_{lr}\begin{Bmatrix} r \\ ik \end{Bmatrix}\right) - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(g_{lr}\begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix}\right) - \begin{Bmatrix} r \\ ik \end{Bmatrix}\frac{\partial g_{lr}}{\partial x^j}$$

$$+ \begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix}\frac{\partial g_{lr}}{\partial x^k} + g_{lr}\begin{Bmatrix} r \\ sj \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ ik \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} r \\ sk \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ ij \end{Bmatrix}g_{lr}$$

利用式(6.5)便可得

$$R_{lijk} = \frac{\partial}{\partial x^j}[li,k] - \frac{\partial}{\partial x^k}[li,j] + [rl,k]\begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix} - [rl,j]\begin{Bmatrix} r \\ ik \end{Bmatrix}$$

再将式(6.1)与式(6.2)代入并进行简化，得

$$R_{lijk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{lk}}{\partial x^i \partial x^j}+\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^l \partial x^k}-\frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial x^i \partial x^k}-\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^l \partial x^j}\right)$$

$$+g_{rs}\left(\begin{Bmatrix} s \\ lk \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} s \\ lj \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} r \\ ik \end{Bmatrix}\right) \tag{7.8}$$

由式(7.8)易见下列关系：

$$\left.\begin{aligned} R_{lijk} &= -R_{iljk} \\ R_{lijk} &= -R_{likj} \\ R_{lijk} &= R_{jkli} \end{aligned}\right\} \tag{7.9}$$

于是

$$R_{iijk}=R_{lijj}=0 \tag{7.10}$$

将式(7.5)乘以 g_{lr}，并对 r 求和，得恒等式

$$R_{lijk}+R_{ljki}+R_{lkij}=0 \tag{7.11}$$

在 N 维空间里，曲率张量不为零的独立分量的数目为

$$K=\frac{1}{12}N^2(N^2-1) \tag{7.12}$$

推算的方法如下。从式(7.10)看出，当 $l=i$ 或 $j=k$ 时，分量为零。于是，不论其正负号，分量可以归为三类：R_{lili}、R_{lilk}和 R_{lijk}，其中 l、i、j 和 k 彼此不同。R_{lili}类型的分量个数同 l 和 i 的组合数相同，即有$\frac{1}{2}N(N-1)$个。R_{lilk}类型的分量个数与选定 l 后 i 和 k 的组合数相同，即有$\frac{1}{2}N(N-1)(N-2)$个。l、i、j、k 的组合数是$\binom{N}{4}=\frac{1}{24}N(N-1)(N-2)(N-3)$。除加减号以外，当 l 同 i、j 或 k 配合后，R_{lijk}就确定了。R_{lijk}类型的分量有$\frac{1}{8}N(N-1)(N-2)(N-3)$个。式(7.11)类型的独立方程有$\binom{N}{4}=\frac{1}{24}N(N-1)(N-2)(N-3)$个。所以 R_{lijk}不为零的独立分量的数目为

$$K=\frac{1}{2}N(N-1)+\frac{1}{2}N(N-1)(N-2)$$

$$+\frac{1}{8}N(N-1)(N-2)(N-3)$$

$$-\frac{1}{24}N(N-1)(N-2)(N-3)=\frac{1}{12}N^2(N^2-1) \tag{7.13}$$

当 $N=2、3、4$ 时，R_{lijk}不为零的独立分量数目 $K=1、6、20$。例如 $N=2$ 时，R_{lijk}不为零的独立分量只有一个，即 R_{1212}。当 $N=3$ 时，独立的 R_{lijk}是 R_{1212}，R_{1313}，R_{2323}，R_{1213}，R_{2123}，R_{3132}等 6 个。

§7.3 彭启(Bianchi)恒等式

选取以 P 点为极点的测地坐标(又称短程坐标，详见§7.8节)x^i，将式(7.3)对 x^l 作协变微分，注意到克里斯托菲符号在极点 P 为零，得知在极点有

$$R^r_{ijk,l}=\frac{\partial}{\partial x^l}(R^r_{ijk})=\frac{\partial^2}{\partial x^l\partial x^j}\left\{{r \atop ik}\right\}-\frac{\partial^2}{\partial x^l\partial x^k}\left\{{r \atop ij}\right\}$$

轮换指标 j、k 和 l，得两个类似的方程。将三式相加，等式右边各项完全相消，于是有

$$R^r_{ijk,l}+R^r_{ikl,j}+R^r_{ilj,k}=0 \tag{7.14}$$

因为式(7.14)中各项都是张量的分量，所以这个方程式对所有坐标系以及所有点都成立，即为全黎曼空间 V_n 的恒等式，称为彭启(Bianchi)恒等式。

对式(7.14)内乘以 g_{hr}，注意到 g_{hr}的协变微分为零，得另一形式的彭启恒等式

$$R_{hijk,l}+R_{hikl,j}+R_{hilj,k}=0 \tag{7.15}$$

§7.4 吕奇(Ricci)张量与曲率不变量

由§7.1与§7.2的分析，好像黎曼-克里斯托菲张量有三种不同的缩并途径。但是，因 R_{lijk}对 l 和 i 是反对称的，有 $R^r_{rjk}=g^{rh}R_{hrjk}=0$，由式(7.4)看出 $R^r_{ijr}=-R^r_{irj}$，因此只考虑下列缩并得

$$R_{ij} = R^r_{ijr} = g^{rh}R_{hijr} \tag{7.16}$$

式(7.16)定义的 R_{ij}称为吕奇(Ricci)张量。

由式(7.3)可知

$$R_{ij} = R^r_{ijr} = \frac{\partial}{\partial x^j}\begin{Bmatrix} r \\ ir \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^r}\begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} r \\ sj \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ ir \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} r \\ sr \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ ij \end{Bmatrix}$$

因为

$$\begin{Bmatrix} i \\ ij \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\ \frac{1}{g}\ \frac{\partial g}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}(\lg \sqrt{g})$$

于是得

$$R_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\lg\sqrt{g} - \frac{\partial}{\partial x^r}\begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r \\ sj \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ ir \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} s \\ ij \end{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x^s}\lg\sqrt{g} \tag{7.17}$$

如果 g 是负数,则 $\lg\sqrt{g}$ 应换成 $\lg\sqrt{-g}$。由上式可看出,R_{ij}是对称的。

吕奇张量还可写成如下形式:

$$R_{ij} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^j} & \dfrac{\partial}{\partial x^r} \\ \begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} r \\ ir \end{Bmatrix} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \begin{Bmatrix} r \\ sj \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} r \\ sr \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} s \\ ij \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} s \\ ir \end{Bmatrix} \end{vmatrix} \tag{7.18}$$

式中

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\lg \sqrt{g}) = \begin{Bmatrix} r \\ ir \end{Bmatrix}$$

因为 R_{ij}是对称张量,所以有$\frac{1}{2}N(N+1)$个独立分量,在四维空间中,爱因斯坦在广义相对论里,称 $R_{ij}=0$ 为自由空间的引力场方程,且称

$$R = g^{ij}R_{ij} \tag{7.19}$$

为曲率不变量。

在所有点都有 $R_{ij}=Ig_{ij}$的空间(其中 I 是一不变量),称为爱因斯坦空间。内乘以 g^{ij},得知 $R=NI$。因此,对于爱因斯坦空间有

$$R_{ij} = \frac{1}{N} R g_{ij} \tag{7.20}$$

上式表示爱因斯坦空间的一种特性，R 为空间的纯量曲率。

由于式(7.9)，彭启恒等式(7.15)可改写为

$$R_{hijk,l} - R_{ihkl,j} - R_{hijl,k} = 0$$

将上式内乘以 $g^{hk}g^{ij}$，并应用式(7.16)和式(7.19)，得

$$R_{,l} - g^{ij}R_{il,j} - g^{hk}R_{hl,k} = 0$$

可以写成

$$R_{,l} = 2g^{ij}R_{il,j} \tag{7.21}$$

§7.5 爱因斯坦张量·黎曼曲率

1. 爱因斯坦张量

爱因斯坦张量的定义是

$$G^{p}_{\cdot q} = g^{pr}R_{ir} - \frac{1}{2}R\delta^{p}_{\cdot q} \tag{7.22}$$

将它对 x^p 作协变微分，有

$$G^{p}_{\cdot q,p} = g^{pr}R_{ir,p} - \frac{1}{2}R_{,p}\delta^{p}_{\cdot q} = g^{pr}R_{ir,p} - \frac{1}{2}R_{,q}$$

由式(7.21)可得

$$G^{p}_{\cdot q,p} = 0 \tag{7.23}$$

它表明爱因斯坦张量的散度为零。这个恒等式在广义相对论中是很重要的。当 $N=4$ 时，在相对论理论中这个方程表示关于动量与能量不变的定理。

2. 黎曼曲率

设 p 为空间 V_n 的一点，从 p 点的任何两个矢量 A^p 和 B^q 可以建立不变量 $R_{hijk}A^hA^jB^iB^k$。下面我们来研究如果把矢量 A^p 与

B^q 换成两线性组合

$$X^p = \lambda A^p + \mu B^p, \quad Y^q = \rho A^q + \tau B^q$$

当 λ、μ、ρ 和 τ 均为不变量时，将会得出什么结果？利用式(7.9)直接计算，可得

$$R_{hijk}X^hX^jY^iY^k = (\lambda\tau - \rho\mu)^2 R_{hijk}A^hA^jB^iB^k$$

表达式 $R_{hijk}A^hA^jB^iB^k$ 对于坐标变换是不变量，在矢量的线性变换下，它几乎是一不变量。为了得到在矢量的线性变换下几乎不变的表达式，计算

$$\begin{aligned}
&(g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij})X^hX^jY^iY^k \\
&= (\lambda A_j + \mu B_j)(\lambda A^j + \mu B^j)(\rho A_k + \tau B_k)(\rho A^k + \tau B^k) \\
&\quad - (\lambda A_k + \mu B_k)(\rho A^k + \tau B^k)(\lambda A_i + \mu B_i)(\rho A^i + \tau B^i) \\
&= (e_A\lambda^2A^2 + e_B\mu^2B^2 + 2\lambda\mu\cos\theta AB)(e_A\rho^2A^2 + e_B\tau^2B^2 \\
&\quad + 2\rho\tau\cos\theta AB) - [e_A\lambda\rho A^2 + e_B\mu\tau B^2 + (\lambda\tau + \rho\mu)\cos\theta AB]^2 \\
&= (\lambda\tau - \mu\rho)^2(e_Ae_B - \cos^2\theta)A^2B^2 \\
&= (\lambda\tau - \mu\rho)^2(g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij})A^hA^jB^iB^k
\end{aligned}$$

其中 θ 是矢量 A^p 和 B^q 之间的夹角。因此，当确定下式的两个矢量换成任何线性组合后，

$$K = \frac{R_{hijk}A^hA^jB^iB^k}{(g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij})A^hA^jB^iB^k} \tag{7.24}$$

是在这一点的不变量。这个不变量称为空间 V_N 中同矢量 A^p 和 B^q 相伴的黎曼曲率。注意：如果矢量 A^p 和 B^q 是正交单位矢量，则 K 的分母等于 1。

在二维空间 V_2 的任一点上，只存在两个独立矢量。因此 V_2 的黎曼曲率在每一点是唯一确定的。选择分量分别为(1,0)和(0,1)的两个矢量就容易得到黎曼曲率的值，于是有

$$K = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{R_{1212}}{g} \tag{7.25}$$

§7.6 平坦空间

如果在空间的每一点上有 $K=0$，就称这个空间为平坦空间。从式(7.24)可知，空间是平坦的必要与充分条件是：对于所有的矢量 A^p 和 B^q，有

$$R_{hijk}A^hA^jB^iB^k = 0$$

由式(7.9)有

$$R_{hijk} + R_{jihk} + R_{jkhi} + R_{hkji} = 0$$

于是

$$R_{hijk} + R_{hkji} = 0$$

互补 i 和 j，得

$$R_{hjik} + R_{hkij} = 0$$

把后一方程乘 2 再与前一方程相加，得

$$2R_{hjik} + 2R_{hkij} + R_{hijk} + R_{hkji} = 0$$

可以写成

$$3R_{hjik} + R_{hjki} + R_{hkij} + R_{hijk} = 0$$

由式(7.11)可得

$$R_{hjik} = 0$$

反之，设 $R_{hjik}=0$，则显然有 $K=0$。因此空间 V_N 为平坦空间的必要与充分条件是黎曼-克里斯托菲张量恒等于零。

由式(7.7)可知，当 $R_{hijk}=0$ 时，必有 $R^r_{\cdot ijk}=0$。

由式(7.2)可知，在平坦空间里，逆变矢量的二阶协变偏导数的次序是可以交换的，当然，也可说明张量的二阶协变偏导数的次序是可以交换的。

平坦空间最常见的例子是欧几里得空间。用直角坐标时，二维欧几里得的度量是 $ds^2=dx^2+dy^2$，而用极坐标时，其度量是 $ds^2=dr^2+r^2d\rho^2$。

§7.7 常曲率空间

下面考查另一种特殊空间——常曲率空间。在这样的空间里，每一点的黎曼曲率与相伴矢量 A^p 和 B^q 的选择无关。由式(7.24)可知，其必要与充分条件是：对于所有的矢量 A^p 和 B^q，

$$[K(g_{hj}g_{ik}-g_{hk}g_{ij})-R_{hijk}]A^hA^jB^iB^k=0$$

作类似于上节的计算，可以证明这个条件可化为

$$R_{hijk}=K(g_{hj}g_{ik}-g_{hk}g_{ij}) \qquad (7.26)$$

这里 K 是坐标 x^i 的函数，或一常数。对 x^l 作协变微分，并注意到 g_{ij} 各量的协变导数为零，得

$$R_{hijk,l}=K_{,l}(g_{hj}g_{ik}-g_{hk}g_{ij})$$

将此式同其由指标 j、k、l 轮换所得两式相加，根据彭启恒等式(7.15)，得

$$K_{,l}(g_{hj}g_{ik}-g_{hk}g_{ij})+K_{,j}(g_{hk}g_{il}-g_{hl}g_{ik})$$
$$+K_{,k}(g_{hl}g_{ij}-g_{hj}g_{il})=0$$

内乘以 g^{hj}，并注意 $g^{hj}g_{hr}=\delta^j_r$，得

$$K_{,l}g_{ik}-K_{,k}g_{il}=0$$

因为上式对 i 由 1 至 N 的所有值都成立，则

$$K_{,l}=K_{,k}=0$$

K 对 x^l 的协变导数为零，即表示黎曼曲率对全空间为常数，可见式(7.26)为空间具有常数曲率的必要与充分条件。以上证明的结论即为舒尔(Schur)定理：若对于空间所有的点，黎曼曲率与定向的方法(即与矢量 A^p 和 B^q)的选择无关，则此曲率对全空间为一常数。

半径为 a 的球面是常曲率空间。用球极坐标时，其度量为 $ds^2=a^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)$。因为 $R_{1212}=a^2\sin^2\theta$，根据式(7.25)，可见球面是具有常曲率 $1/a^2$ 的曲面。

§ 7.8 测地线与测地坐标

1. 测地线

在三维欧几里得空间里，直线是两点间距离最短的路线，下面我们将这一基本概念推广到黎曼空间。在变分法中，用求泛函极值的方法，求得测地线的微分方程，读者早已熟知。这里我们还是从基本的原理推导测地线的微分方程组。

设 $\mathscr{L}$ 是连接两定点 P_0 与 P_1 的曲线 $x^i=x^i(t)$，参数 t 在 P_0 与 P_1 的值分别为 t_0 与 t_1，于是 P_0 与 P_1 间沿曲线的距离 s 由下式确定

$$s=\int_{t_0}^{t}\sqrt{eg_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}}\,\mathrm{d}t \tag{7.27}$$

设取沿 $\mathscr{L}$ 连续变化的任意微小矢量，则方程 $\overline{x}^i=x^i+\delta x^i$ 确定一条与 $\mathscr{L}$ 邻近的曲线 $\overline{\mathscr{L}}$。加上在 P_0 和 P_1 处 $\delta x^i=0$ 的条件，这就意味着曲线 $\overline{\mathscr{L}}$ 总是连接着 P_0 和 P_1 两定点。沿 $\overline{\mathscr{L}}$ 从 P_0 到 P_1 的距离 $\overline{s}$ 由下式给出：

$$\overline{s}=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{eg_{ij}(\overline{x})\frac{\mathrm{d}\overline{x}^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\overline{x}^j}{\mathrm{d}t}}\,\mathrm{d}t$$

其中 $g_{ij}(\overline{x})$ 已是 $\overline{x}^i$ 的函数。

$$\begin{aligned}
g_{ij}(\overline{x})\frac{\mathrm{d}\overline{x}^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\overline{x}^j}{\mathrm{d}t}&=\left(g_{ij}+\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\delta x^k\right)\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}(\delta x^i)}{\mathrm{d}t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}(\delta x^j)}{\mathrm{d}t}\right)\\
&=g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}+2g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}(\delta x^j)}{\mathrm{d}t}\\
&\quad+\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\delta x^k\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

以上展开式中已略去了高于一阶的项。于是

$$\sqrt{eg_{ij}(\bar{x})\frac{\mathrm{d}\bar{x}^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\bar{x}^j}{\mathrm{d}t}}$$

$$=\sqrt{eg_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}}\left\{1+\frac{g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}(\delta x^j)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\delta x^k\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}}{g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}}\right\}$$

因此从曲线 $\mathscr{L}$ 变到曲线 $\overline{\mathscr{L}}$ 时，曲线长度的变化 δs 是

$$\delta s=\bar{s}-s=\int_{t_0}^{t}\frac{g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}(\delta x^j)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\delta x^k\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}}{\sqrt{eg_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}}}\mathrm{d}t$$

现在取沿 $\mathscr{L}$ 的弧长 s 为参数来简化方程，即

$$\delta s=\int_{s_0}^{s_1}\left[g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}(\delta x^j)}{\mathrm{d}s}+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\delta x^k\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}\right]\mathrm{d}s$$

其中 s_0 和 s_1 分别是对应于点 P_0 和点 P_1 的 s 值，用分部积分法得

$$\delta s=\left[g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\delta x^j\right]_{s_0}^{s_1}-\int_{s_0}^{s_1}\delta x^j\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}\right]\mathrm{d}s$$

已积出的部分等于零，因为在 P_0 和 P_1 处 δx^j 是零。还有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\right)=g_{ij}\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}s^2}+\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}$$

$$=g_{ij}\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}s^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}$$

因此

$$\delta s=-\int_{s_0}^{s}\delta x^j\left[g_{ij}\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}s^2}+[ik,j]\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}\right]\mathrm{d}s$$

变分 δx^j 是任意的，所以曲线 $\mathscr{L}$ 为测地线的必要与充分条件是

$$g_{ij}\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}s^2}+[ik,j]\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}=0 \qquad (7.28)$$

内乘以 g^{jl} 得逆变形式

$$\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s}\right)=\frac{\mathrm{d}^2x^l}{\mathrm{d}s^2}+\begin{Bmatrix}l\\ik\end{Bmatrix}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}=0 \qquad (7.29)$$

方程式(7.28)或式(7.29)是测地线的微分方程组。根据微分方程理论知，如果在任一点给定 x^i 和 $\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}s$ 的初值，方程就有唯一解 $x^i=x^i(s)$。其几何意义是，按给定方向通过空间任一点，有唯一的测地线。上面我们曾经用通过两点的曲线定义测地线，这样的测地线可能不是唯一的，除非这两点彼此非常非常接近。例如通过球面上的某一点按给定的方向，则有唯一的测地线，而通过球面上同一直径两端点，则有无数根测地线，因为通过这两点的所有大圆都是测地线。

对于欧几里得空间，采用笛卡尔直角坐标，克里斯托非符号都为零，因此测地线的方程是 $\mathrm{d}^2x^i/\mathrm{d}s^2=0$，其解是 $x^i=A^is+B^i$，这里 A^i 与 B^i 都是常矢量，也就是说，测地线是直线。

2. 零测地线

在三维欧几里得空间的直角坐标系里，两点间的距离为

$$\mathrm{d}s^2=(\mathrm{d}x^1)^2+(\mathrm{d}x^2)^2+(\mathrm{d}x^3)^2$$

这时，$\mathrm{d}s^2\geqslant 0$，这种空间称为真欧氏空间。如果 $\mathrm{d}s^2$ 可正、可负、可为零，则称为伪欧氏空间。伪欧氏空间与通常的观念不同，即两点的距离，矢量的长度可以是实的，也可以是虚的。为此，引入因子 e：

$$\mathrm{d}s^2=eg_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$$

e 取 +1 或 −1，以保证在 N 维空间里，$\mathrm{d}s^2$ 为正数，$\mathrm{d}s$ 为实数。

如果曲线 $x^i(t)$ 以 t 为参数，则两点 $x^i(t_1)$ 和 $x^i(t_0)$ 的曲线长度为

$$s=\int_{t_0}^{t}\sqrt{eg_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}=\int_{t_0}^{t}\sqrt{eg_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}}\,\mathrm{d}t$$

特别地，如果曲线 $x^i(s)$ 以 s 为参数，则以从某点算起的曲线长度 s 为

$$s=\int_{s_0}^{s}\sqrt{eg_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}}\,\mathrm{d}s$$

很明显，根号内的值必为 1，除非是零曲线。因此

$$g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}=e \tag{7.30}$$

微分得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}\right)=\frac{\delta}{\delta s}\left(g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}\right)=2g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}\right)$$

因此由式(7.29)可知，在测地线上所有各点，不变量 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}\right)$ 为零。所以沿测地线，指示数 e 不会突然改变，否则其导数不为零。因此若在测地线上任一点，切矢量不是零矢量，则它在任何其他点便也不可能是零矢量。另一方面，如果起始方向的切矢量是零矢量，则曲线是零曲线，当然也就不能用弧距离作为参数。这时就令零曲线 $x^i=x^i(t)$ 作为方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}s^2}+\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}=0 \tag{7.31}$$

的解是一零测地线。注意，不是所有的零曲线都是零测地线。

3. 测地坐标

是否有这样的坐标系存在，在这个坐标系里的某一特殊点上，所有的克里斯托菲符号均为零。回答是肯定的，下面将证明有这样的坐标系存在，这个坐标系就是所谓测地坐标系，极点就是一特殊点，在测地坐标系的极点，所有的克里斯托菲符号均为零。

考虑一般的坐标系 x^i，它们在某一特定点 P_o 的值是 $x^i_{(o)}$，并用方程

$$\bar{x}^i=x^i-x^i_{(o)}+\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} i \\ mn \end{Bmatrix}_{(o)}(x^m-x^m_{(o)})(x^n-x^n_{(o)}) \tag{7.32}$$

引入新坐标系 $\bar{x}^i$。根据(o)表示在点 P_o 取值，o 用小圆括号括起来的意思表示没有张量的意义，求和约定对它不适用。对 x^j 微分，得

$$\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^j}=\delta^i_j+\begin{Bmatrix} i \\ jn \end{Bmatrix}_{(o)}(x^n-x^n_{(o)}) \tag{7.33}$$

因为$\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right)_{(o)}=\delta^i_j$，所以雅可毕行列式$\left|\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right)_{(o)}\right|\neq 0$，这表明在$P_o$的近旁，变换式(7.32)是容许的。将式(7.33)内乘以$\partial x^j/\partial \bar{x}^k$得

$$\delta^i_k=\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}+\left\{{i \atop jn}\right\}_{(o)}(x^n-x^n_{(o)})\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k}$$

将它对$\bar{x}^k$微分，有

$$0=\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^k\partial \bar{x}^h}\left\{{i \atop jn}\right\}_{(o)}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^h}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k}+\left\{{i \atop jn}\right\}_{(o)}(x^n-x^n_{(o)})\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^k\partial \bar{x}^h}$$

于是，在P_o点有

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\right)_{(o)}=\delta^i_k;\quad \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^k\partial \bar{x}^h}\right)_{(o)}=-\left\{{i \atop jn}\right\}_{(o)}\delta^n_h\delta^j_k=-\left\{{i \atop kh}\right\}_{(o)}$$

将它们代入第二种克里斯托菲符号变换关系式：

$$\overline{\left\{{p \atop lm}\right\}}=\left\{{s \atop ij}\right\}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^s}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}+\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l\partial \bar{x}^m}$$

得

$$\overline{\left\{{p \atop lm}\right\}}_{(o)}=\left\{{s \atop ij}\right\}_{(o)}\delta^p_s\delta^i_l\delta^j_m-\delta^p_j\left\{{j \atop lm}\right\}_{(o)}$$

即

$$\overline{\left\{{p \atop lm}\right\}}_{(o)}=0$$

因此，总可以选择称作测地坐标系的特殊坐标系，使得克里斯托菲符号在称作极点的任何指定点等于零。变换式(7.32)不是获得测地坐标的唯一方法，我们已证明了这样的坐标系的存在，且在这个坐标系里$\bar{x}^i_{(o)}=0$，这个点称为极点，又是坐标原点。

测地坐标系是一个十分重要的特殊坐标系，其原因是：在测地坐标系的原点，所有的克里斯托菲符号为零，所以在这一点的协变导数化为相应的偏导数。

在第四章里已指出，如果在某一坐标系里张量为零，则它在每个坐标系里都是零。如果先在测地坐标系的极点得以证明，则运算往往简单得多。

§7.9 矢量的平行性

在欧几里得空间里，对于笛卡尔直角坐标来说，如果矢量 A_i 的分量保持常数，则可在整个空间里平行地移栽而得到 A_i 的平行矢量场，且可以用 $\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}=0$ 或 $\partial A_i/\partial x^j=0$ 解析地表示。因为在欧几里得空间里，对于笛卡尔直角坐标系来说，所有的克里斯托菲符号为零，可以把这两组方程等价地分别写成张量形式 $\delta A/\delta t=0$ 或 $A_{i,j}=0$。这样，为把平行性概念推广到黎曼空间提供了两种途径。但是偏微分方程组 $A_{i,j}=0$ 一般是不相容的，所以按第二种途径推广是不可能的。

内禀导数只能沿曲线来定义，所以按第一种办法推广平行性概念时，只能沿一曲线定义平行性。即如果矢量 A_i 是微分方程组

$$\frac{\delta A^i}{\delta t}\equiv\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}-\begin{Bmatrix}l\\ ik\end{Bmatrix}A_l\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}=0 \qquad (7.34)$$

的一组解，则 A_i 沿曲线 $x^i=x^i(t)$ 构成平行矢量场。

这些方程形成 N 个一阶微分方程的方程组，因此如果在曲线的任一点给定矢量 A_i，则便在曲线的所有其他各点唯一地确定了这个矢量。也可以说，通过沿曲线的平行传播，从一已知矢量获得一平行矢量场。

因为

$$\frac{\delta A^i}{\delta t}=\frac{\delta}{\delta t}(g^{ij}A_j)=g^{ij}\frac{\delta A_j}{\delta t}$$

所以，可以把沿曲线的平行性条件写成逆变形式

$$\frac{\delta A^i}{\delta t}\equiv\frac{\mathrm{d}A^i}{\mathrm{d}t}+\begin{Bmatrix}i\\ jk\end{Bmatrix}A^j\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}=0 \qquad (7.35)$$

由式(7.29)可知，单位切矢量形成沿测地线的平行矢量场。

平行矢量场所有矢量的长度保持不变。证明如下：

矢量 A^i 的长度由 $(A)^2=e_{(A)}g_{ij}A^iA^j$ 给定。微分后有

$$2A\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e_{(A)}g_{ij}A^iA^j)=\frac{\delta}{\delta t}(e_{(A)}g_{ij}A^iA^j)$$

$$=2e_{(A)}g_{ij}\frac{\delta A^i}{\delta t}A^j$$

如果 A_i 形成一平行矢量场，则此方程便化为

$$A\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=0$$

可见矢量场各矢量长度不变。

设矢量 A^i 与 B^i 之间的夹角 θ 由 $AB\cos\theta=g_{ij}A^iB^j$ 给定。微分后得

$$AB\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos\theta)+\left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}B+A\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\right)\cos\theta=g_{ij}\left(\frac{\delta A^i}{\delta t}B^j+A^i\frac{\delta B^j}{\delta t}\right)$$

当 A^i 与 B^j 都形成平行矢量场时，只要矢量 A^i 与 B^j 都不是零矢量，这个方程化为 $\frac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\mathrm{d}t}=0$。就是说，当两非零矢量沿同一曲线平行移栽时，它们之间的夹角保持不变。

把矢量从 P 点通过平行移栽到 Q 点所得到的矢量，依赖于连接 P 与 Q 的曲线。因此绕一闭曲线的平行移栽，不一定能重返到原来的矢量。如图 7.1 所示，在平面内沿圆周移栽的两平行矢量场，当平面卷成曲面时，A^i 与 B^j 从 P 到 Q 平行移栽后，都不能重返到原来的矢量。

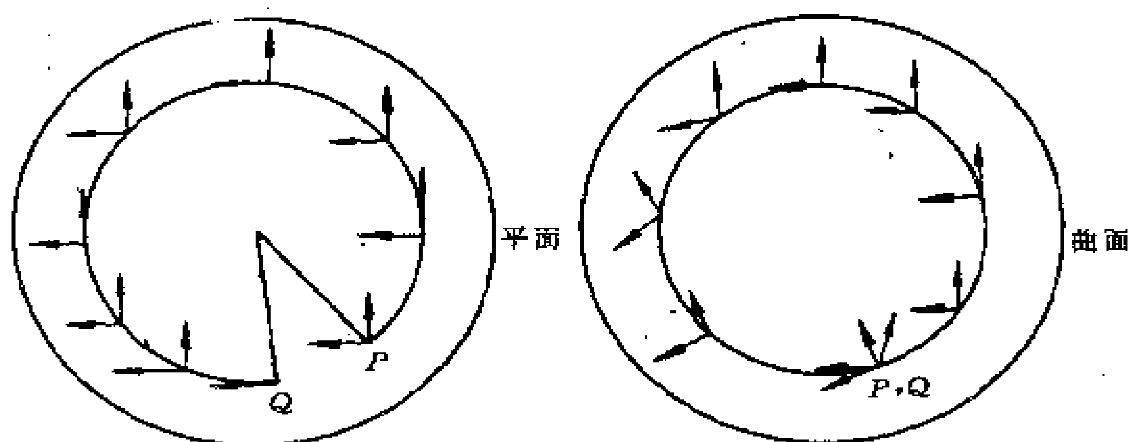


图 7.1

本章概要

1. 黎曼-克里斯托菲张量

$$R^r_{ijk} \equiv \frac{\partial}{\partial x^j}\begin{Bmatrix} r \\ ik \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r \\ sj \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ ik \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} r \\ sk \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ ij \end{Bmatrix}$$

又称为第二种黎曼张量。它关于 j 与 k 是反对称的，

$$R^r_{ijk} = - R^r_{ikj}$$

并且

$$R^r_{ijk} + R^r_{jki} + R^r_{kij} = 0$$

$$A^i_{,jk} - A^i_{,kj} = - R^i_{rjk} A^r$$

2. 曲率张量

$$R_{lijk} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(g_{lr}\begin{Bmatrix} r \\ ik \end{Bmatrix}\right) - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(g_{lr}\begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix}\right) - \begin{Bmatrix} r \\ ik \end{Bmatrix}\frac{\partial g_{lr}}{\partial x^j}$$

$$+ \begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix}\frac{\partial g_{lr}}{\partial x^k} + g_{lr}\begin{Bmatrix} r \\ sj \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ ik \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} r \\ sk \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ ij \end{Bmatrix} g_{lr}$$

又称为第一种黎曼符号。

$$R_{lijk} = \frac{\partial}{\partial x^j}[l,ik] - \frac{\partial}{\partial x^k}[l,ij] + [r,lk]\begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix} - [r,lj]\begin{Bmatrix} r \\ ik \end{Bmatrix}$$

$$R_{lijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{lk}}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^l \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^l \partial x^j}\right)$$

$$+ g_{rs}\left(\begin{Bmatrix} s \\ lk \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} s \\ lj \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} r \\ ik \end{Bmatrix}\right)$$

一组常用的关系式与恒等式

$$R_{lijk} = - R_{iljk}$$

$$R_{lijk} = - R_{likj}$$

$$R_{lijk} = R_{jkli}$$

$$R_{iijk} = R_{lijj} = 0$$

$$R_{lijk} + R_{ljki} + R_{lkij} = 0$$

在 N 维空间里，曲率张量的独立分量的数目为

$$K=\frac{1}{12}N^2(N^2-1)$$

3. 彭启恒等式

$$R^r_{ijk,l}+R^r_{ikl,j}+R^r_{ilj,k}=0$$

或

$$R_{hijk,l}+R_{hikl,j}+R_{hilj,k}=0$$

4. 吕奇张量

$$R_{ij}=R^r_{ijr}=g^{rh}R_{hijr}$$

$$R_{ij}=\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}\log\sqrt{g}-\frac{\partial}{\partial x^r}\begin{Bmatrix}r\\ij\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}r\\sj\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}s\\ir\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}s\\ij\end{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x^s}\log\sqrt{g}$$

或

$$R_{ij}=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x^j} & \frac{\partial}{\partial x^r}\\ \begin{Bmatrix}r\\ij\end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix}r\\ir\end{Bmatrix}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\begin{Bmatrix}r\\sj\end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix}r\\sr\end{Bmatrix}\\ \begin{Bmatrix}s\\ij\end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix}s\\ir\end{Bmatrix}\end{vmatrix}$$

其中

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\log\sqrt{g})=\begin{Bmatrix}r\\ir\end{Bmatrix}$$

5. 曲率不变量

$$R=g^{ij}R_{ij}$$

6. 爱因斯坦空间

所有各点都有 $R_{ij}=Ig_{ij}$ 的空间（I 是一不变量）称为爱因斯坦空间。对于该空间有

$$R_{ij}=\frac{1}{N}Rg_{ij}$$

7. 爱因斯坦张量

$$G^p_{\cdot q}=g^{pr}R_{ir}-\frac{1}{2}R\delta^p_{\cdot q}$$

爱因斯坦张量的散度为零，即 $G^p_{\cdot q,p}=0$。

8. 黎曼曲率

在空间 V_N 中同矢量 A^p 和 B^q 相伴的黎曼曲率是

$$K=\frac{R_{hijk}A^hA^jB^iB^k}{(g_{hj}g_{ik}-g_{hk}g_{ij})A^hA^jB^iB^k}$$

9. 平坦空间

空间 V_N 为平坦空间的必要与充分条件是黎曼-克里斯托菲张量为零，即

$$R_{hijk}=0$$

显然，平坦空间里的黎曼曲率为零，即 $K=0$。

10. 常曲率空间

空间具有常数曲率的必要与充分条件是

$$R_{hijk}=K(g_{hj}g_{ik}-g_{hk}g_{ij})$$

或黎曼曲率对 x^l 的协变导数为零，即黎曼曲率对全空间为常数，即 $K_{,l}=0$。

11. 测地线

$$g_{ij}\frac{d^2x^i}{ds^2}-[ik,j]\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0$$

或
$$\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{dx^l}{ds}\right)\equiv\frac{d^2x^l}{ds^2}+\begin{Bmatrix} l \\ ik \end{Bmatrix}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0$$

12. 零测地线

$$\frac{d^2x^l}{ds^2}+\begin{Bmatrix} l \\ ik \end{Bmatrix}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}=0$$

13. 测地坐标

测地坐标极点的克里斯托菲符号等于零。

$$\overline{\begin{Bmatrix} p \\ lm \end{Bmatrix}}_{(0)}=0$$

14. 矢量的平行性

当矢量 A_i 是微分方程组

$$\frac{\delta A_i}{\delta t}\equiv\frac{dA_i}{dt}-\begin{Bmatrix} l \\ ik \end{Bmatrix}A_l\frac{dx^k}{dt}=0$$

的一组解时，A_i 沿曲线 $x^i=x^i(t)$ 构成平行矢量场。平行性条件也可写成

$$\frac{\delta A^i}{\delta t}\equiv\frac{dA^i}{dt}+\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}A^j\frac{dx^k}{dt}=0$$

矢量沿曲线平行移栽，其长度不变。两矢量沿同一曲线平行移栽，其夹角不变。但绕闭曲线平行移栽，不一定能重返到原来的矢量方位。

习　　题

7.1　试证　$R^l_{ijk}+R^l_{jki}+R^l_{kij}=0$

7.2　试证　$R^l_{jjk}=0$

7.3　若 V_N 的基本张量 $g_{ii}=U^{-2}$，$g_{ij}=0(i\neq j)$，其中 U 为坐标的函数，若 h、i、j、k 不互等，试验证：

$$[ki,j]=0,\qquad \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}=0,$$

$$[ii,j]=-\frac{1}{U^3}\frac{\partial U}{\partial x^j},\qquad \begin{Bmatrix} i \\ ij \end{Bmatrix}=-\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial x^j},$$

$$[ji,i]=\frac{1}{U^3}\frac{\partial U}{\partial x^j},\qquad \begin{Bmatrix} j \\ ii \end{Bmatrix}=\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial x^j},$$

$$[ii,i]=-\frac{1}{U^3}\frac{\partial U}{\partial x^i},\qquad \begin{Bmatrix} i \\ ii \end{Bmatrix}=-\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial x^i}。$$

7.4　用 7.3 题证明

$$R_{hiik}=-\frac{1}{U^3}\frac{\partial^2 U}{\partial x^h\partial x^k}$$

及

$$R_{hiih}=\frac{1}{U^4}\sum_k\left(\frac{\partial U}{\partial x^k}\right)^2-\frac{1}{U^3}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^{j2}}+\frac{\partial^2 U}{\partial x^{k2}}\right)$$

7.5　若 7.3 题中函数 U 为

$$U=1+\frac{1}{4}K[(x^1)^2+(x^2)^2+\cdots+(x^N)^2]$$

式中 K 为常数，试证它满足常曲率空间条件

$$R_{hijk}=K(g_{hj}g_{ik}-g_{hk}g_{ij})$$

7.6　若 7.3 题中函数 U 为

$$U^2=-K(x^i)^2$$

其中 K 为一负常数，试证它也满足常曲率空间条件。

7.7　设 V_2 的线元素是 $ds^2=du^2+Gdv^2$，其中 G 是 u 与 v 的函数，试证

$$R_{1212}=-G\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}。$$

7.8　对正交参数曲线系($g_{12}=0$)的空间 V_2，试证

$$R_{12}=0$$

$$R_{11}g_{22}=R_{22}g_{11}=R_{1221}$$

$$R=g^{ij}R_{ij}=\frac{R_{1221}}{g_{11}g_{22}}$$

于是得

$$R_{ij}=\frac{1}{2}Rg_{ij}$$

所以每一 V_2 都是爱因斯坦空间。

7.9　对于空间 V_2，求证 $gR_{ij}=-g_{ij}R_{1212}$，$gR=-2R_{1212}$，因此证明每个 V_2 都是爱因斯坦空间。

7.10　对坐标曲面的三重正交系的空间 V_3，试证：若 h,i,j 不等，则

$$R_{ij}=\frac{1}{g_{hh}}R_{ihhj}$$

$$R_{hh}=\frac{1}{g_{ii}}R_{hiih}+\frac{1}{g_{jj}}R_{hjjh}$$

$$R=\sum_{i,j}\frac{1}{g_{ii}g_{jj}}R_{ijji}$$

$$R_{hiih}-g_{hh}R_{ii}-g_{ii}R_{hh}+\frac{1}{2}Rg_{hh}g_{ii}=0$$

7.11　设三维平坦空间的度量是 $f(r)[(dx^1)^2+(dx^2)^2]$，其中 $(r)^2=(x^1)^2+(x^2)^2$，试证 $f(r)=c(r)^k$，其中 c 与 k 是常数。

7.12　试证爱因斯坦空间 V_3 有常数曲率。

7.13　试证常曲率空间是爱因斯坦空间。

7.14　试证在欧几里得空间 V_4 里，超球面

$x^1=c\sin\theta\sin\varphi\sin\psi$，　$x^2=c\sin\theta\sin\varphi\cos\psi$，

$x^3=c\sin\theta\cos\varphi$，　$x^4=c\cos\theta$，

是具有常曲率 $1/c^2$ 的空间 V_3。

9605-86

附录 A　75 条例题

1.　用求和约定改写下列各式

(a) $d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial\phi}{\partial x^2}dx^2+\cdots+\frac{\partial\phi}{\partial x^N}dx^N$

(b) $\frac{d\bar{x}^k}{dt}=\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^1}\frac{dx^1}{dt}+\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^2}\frac{dx^2}{dt}+\cdots+\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^N}\frac{dx^N}{dt}$

(c) $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+\cdots+(x^N)^2$

(d) $ds^2=g_{11}(dx^1)^2+g_{22}(dx^2)^2+g_{33}(dx^3)^2=g_{ij}dx^idx^j$,

$g_{ij}=0\quad(i\neq j)$

(e) $\sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}g_{pq}dx^pdx^q$

解： (a) 表为 $d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x^i}dx^i$

(b) $\frac{d\bar{x}^k}{dt}=\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}$

(c) $x^ix^j\delta_{ij}$

(d) $ds^2=g_{kk}dx^kdx^k\quad(k=1,2,3)$

(e) $g_{pq}dx^pdx^q\quad(N=3)$

2.　将下列求和约定的表示式写成多项求和表示式

(a) $a_{jk}x^k$，　(b) $A_{pq}A^{qr}$，　和　(c) $\bar{g}_{rs}=g_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^r}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^s}\quad N=3$

解： (a) $\sum_{k=1}^{N}a_{jk}x^k=a_{j1}x^1+a_{j2}x^2+\cdots+a_{jN}x^N$

(b) $\sum_{q=1}^{N}A_{pq}A^{qr}=A_{p1}A^{1r}+A_{p2}A^{2r}+\cdots+A_{pN}A^{Nr}$

(c) $\bar{g}_{rs}=\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}g_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^r}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^s}$

$$=\sum_{j=1}^{3}\left(g_{j1}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^r}\frac{\partial x^1}{\partial\bar{x}^s}+g_{j2}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial\bar{x}^s}+g_{j3}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial\bar{x}^s}\right)$$

$$=g_{11}\frac{\partial x^1}{\partial\bar{x}^r}\frac{\partial x^1}{\partial\bar{x}^s}+g_{21}\frac{\partial x^2}{\partial\bar{x}^r}\frac{\partial x^1}{\partial\bar{x}^s}+g_{31}\frac{\partial x^3}{\partial\bar{x}^r}\frac{\partial x^1}{\partial\bar{x}^s}$$

$$+g_{12}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^s}+g_{22}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^s}+g_{32}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^s}$$

$$+g_{13}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^s}+g_{23}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^s}+g_{33}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^s}$$

3. 在直角坐标系 x^k，$k=1,2,\cdots,N$ 中，下列各方程当 $N=2,3$ 或 $N\geqslant 4$ 时表示什么轨迹？设这些函数是单值、连续可微、独立的。

解： (a) $a_k x^k=1$，式中 a_k 是常数。

$N=2$ 时，$a_1x^1+a_2x^2=1$，是二维空间的一条线，即平面中的一条线，

$N=3$ 时，$a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3=1$，是三维空间中的一平面，

$N\geqslant 4$ 时，$a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_Nx^N=1$，是超平面。

(b) $x^kx^k=1$

$N=2$，$(x^1)^2+(x^2)^2=1$　平面中单位半径的圆，

$N=3$，$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=1$　半径为单位长度的球面，

$N\geqslant 4$，$(x^1)^2+(x^2)^2+\cdots+(x^N)^2=1$　半径为单位长度的超球面。

(c) $x^k=x^k(u)$

$N=2$，$x^1=x^1(u)$，$x^2=x^2(u)$　平面曲线的参数方程，

$N=3$，$x^1=x^1(u)$，$x^2=x^2(u)$，$x^3=x^3(u)$　三维空间的曲线，

$N\geqslant 4$，$x^1=x^1(u)$，$x^2=x^2(u)$，$\cdots$，$x^N=x^N(u)$，N 维空间的曲线。

(d) $x^k=x^k(u,v)$

$N=2$，$x^1=x^1(u,v)$，$x^2=x^2(u,v)$　将 (u,v) 变换到 (x^1,x^2) 的坐标变换，

$N=3$，$x^1=x^1(u,v)$，$x^2=x^2(u,v)$，$x^3=x^3(u,v)$

三维表面的 u,v 参数方程，

$N\geqslant 4$，　超表面。

逆变矢量、协变矢量和张量

4. 写出下列张量的变换律：(a) $A^{i}_{\cdot jk}$，(b) $B^{mn}_{\cdots ijk}$，(c) C^{m}。

解：(a) $\overline{A}^{p}_{\cdot qr}=\dfrac{\partial\overline{x}^{p}}{\partial x^{i}}\dfrac{\partial x^{j}}{\partial\overline{x}^{q}}\dfrac{\partial x^{k}}{\partial\overline{x}^{r}}A^{i}_{\cdot jk}$

(b) $\overline{B}^{pq}_{\cdots rst}=\dfrac{\partial\overline{x}^{p}}{\partial x^{m}}\dfrac{\partial\overline{x}^{q}}{\partial x^{n}}\dfrac{\partial x^{i}}{\partial\overline{x}^{r}}\dfrac{\partial x^{j}}{\partial\overline{x}^{s}}\dfrac{\partial x^{k}}{\partial\overline{x}^{t}}B^{mn}_{\cdots ijk}$

(c) $\overline{C}^{p}=\dfrac{\partial\overline{x}^{p}}{\partial x^{m}}C^{m}$

5. $A(j,k,l,m)$是坐标 x^{i} 的函数，变换到其他坐标系时，符合下列变换律

$$\overline{A}(p,q,r,s)=\frac{\partial x^{j}}{\partial\overline{x}^{p}}\frac{\partial\overline{x}^{q}}{\partial x^{k}}\frac{\partial\overline{x}^{r}}{\partial x^{l}}\frac{\partial\overline{x}^{s}}{\partial x^{m}}A(j,k,l,m)$$

(a) A 是不是张量？(b) 若是，写出该张量符号，(c) 给出逆变和协变的阶数和秩。

解：(a) 是张量，(b) $A^{klm}_{\cdots j}$，(c) 三阶逆变，一阶协变，$3+1=4$ 秩。

6. 试问下列的量是不是张量？若是，问其是逆变还是协变？并给出它的秩：(a) dx^{k}，(b) $\dfrac{\partial\phi(x^{1},\cdots,x^{N})}{\partial x^{k}}$。

解：(a) 设坐标变换 $\overline{x}^{j}=\overline{x}^{j}(x^{1},\cdots,x^{N})$，于是 $d\overline{x}^{j}=\dfrac{\partial\overline{x}^{j}}{\partial x^{k}}dx^{k}$，所以 dx^{k} 是一阶逆变张量或逆变矢量。注意 k 应是上标。

(b) 在 $x^{k}=x^{k}(\overline{x}^{1},\cdots,\overline{x}^{N})$的变换下，$\phi$ 是 x^{k} 的函数，因而也是 $\overline{x}^{j}$ 的函数，于是 $\phi(x^{1},\cdots,x^{N})=\overline{\phi}(\overline{x}^{1},\cdots,\overline{x}^{N})$，即 ϕ 是标量或不变量(零阶张量)。根据求偏导数的链式规则，$\dfrac{\partial\overline{\phi}}{\partial\overline{x}^{j}}=\dfrac{\partial\phi}{\partial\overline{x}^{j}}=\dfrac{\partial\phi}{\partial x^{k}}\dfrac{\partial x^{k}}{\partial\overline{x}^{j}}=\dfrac{\partial x^{k}}{\partial\overline{x}^{j}}\dfrac{\partial\phi}{\partial x^{k}}$，于是

$\frac{\partial\phi}{\partial x^k}$的变换像 $\overline{A}_j=\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^j}A_k$ 一样，所以$\frac{\partial\phi}{\partial x^k}$是一阶协变张量或协变矢量。

注意：跪标出现在$\frac{\partial\phi}{\partial x^k}$的分母里，其作用犹如下标而表示了协变特性，具有分量$\frac{\partial\phi}{\partial x^k}$的张量如同 ϕ 的梯度 gradϕ 一样，写成 gradϕ 或$\nabla\phi$。

7. 一协变张量，在直角坐标系中具有分量 xy，$2y-z^2$，xy，试求在球坐标系中的协变分量。

解： 令 A_j 表示张量在直角坐标系 $x^1=x$，$x^2=y$，$x^3=z$ 中的协变分量，则

$$A_1=x^1x^2,\ A_2=2x^2-(x^3)^2,\ A_3=x^1x^3$$

应当注意上标和幂的区别。

令 $\overline{A}_k$ 表示张量在球坐标系 $\overline{x}^1=r$，$\overline{x}^2=\theta$，$\overline{x}^3=\phi$，则

$$\overline{A}_k=\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^k}A_j \tag{A7.1}$$

两种坐标系之间的变换关系是

$$x^1=\overline{x}^1\sin\overline{x}^2\cos\overline{x}^3$$
$$x^2=\overline{x}^1\sin\overline{x}^2\sin\overline{x}^3$$
$$x^3=\overline{x}^1\cos\overline{x}^2$$

由式(A7.1)可得所求的协变分量

$$\overline{A}_1=\frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^1}A_1+\frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^1}A_2+\frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^1}A_3$$
$$=(\sin\overline{x}^2\cos\overline{x}^3)(x^1x^2)+(\sin\overline{x}^2\sin\overline{x}^3)(2x^2-(x^3)^2)$$
$$+(\cos\overline{x}^2)(x^1x^3)$$
$$=(\sin\theta\cos\phi)(r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi)$$
$$+(\sin\theta\cos\varphi)(2r\sin\theta\sin\varphi-r^2\cos^2\theta)$$
$$+(\cos\theta)(r^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi)$$

$$\overline{A}_2=\frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^2}A_1+\frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^2}A_2+\frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^3}A_3$$

$$
\begin{aligned}
&= (r\cos\theta\cos\varphi)(r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi) \\
&\quad + (r\cos\theta\sin\varphi)(2r\sin\theta\sin\varphi - r^2\cos^2\theta) \\
&\quad + (-r\sin\theta)(r^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{A}_3 &= \frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^3}A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^3}A_2 + \frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^3}A_3 \\
&= (-r\sin\theta\sin\varphi)(r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi) \\
&\quad + (r\sin\theta\cos\varphi)(2r\sin\theta\sin\varphi - r^2\cos^2\theta) \\
&\quad + (0)(r^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi)
\end{aligned}
$$

8. 即使 A_p 是一阶协变张量，试证 $\frac{\partial A_p}{\partial x^q}$ 不是张量。

证： 由假设 $\overline{A}_j = \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j}A_p$，对 $\overline{x}^k$ 求导。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{A}_j}{\partial \overline{x}^k} &= \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial A_p}{\partial \overline{x}^k} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \overline{x}^j \partial \overline{x}^k}A_p \\
&= \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial A_p}{\partial x^q}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \overline{x}^k \partial \overline{x}^j}A_p \\
&= \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial A_p}{\partial x^q} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial^2 \overline{x}^k \partial \overline{x}^j}A_p
\end{aligned}
$$

因为等式右边出现了第二项，$\frac{\partial A_p}{\partial x^q}$ 不符合张量的变换律。（证毕）

9. 试证任一点的场速度是一阶逆变张量。

证： 任一点场的速度在坐标系 x^k 中有分量 $\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}$，在坐标系 $\overline{x}^j$ 中，速度为 $\frac{\mathrm{d}\overline{x}^j}{\mathrm{d}t}$，根据链式求导规则，有

$$
\frac{\mathrm{d}\overline{x}^j}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^k}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}
$$

这表示速度是一阶逆变张量或逆变矢量。（证毕）

克罗内克符号 δ

10. 计算 (a) $\delta_q^p A_s^{qr}$， (b) $\delta_q^p \delta_r^q$。

解：因为 $\delta^p_q=\begin{matrix}1 & 若\ p=q\\ 0 & 若\ p\neq q\end{matrix}$ 故有

(a) $\delta^p_q A^{qr}_{\cdots s}=A^{pr}_{\cdots s}$，(b) $\delta^p_q\delta^q_r=\delta^p_r$

11. 试证 $\dfrac{\partial x^p}{\partial x^q}=\delta^p_q$。

证：若 $p=q$，$\dfrac{\partial x^p}{\partial x^q}=1$，因为 $x^p=x^q$，

若 $p\neq q$，$\dfrac{\partial x^p}{\partial x^q}=0$，因为 x^p 与 x^q 无关，

所以
$$\frac{\partial x^p}{\partial x^q}=\delta^p_q \qquad (证毕)$$

12. 试证 $\dfrac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^q}\dfrac{\partial \overline{x}^q}{\partial x^r}=\delta^p_r$。

证：坐标 x^p 是坐标 $\overline{x}^q$ 的函数，$\overline{x}^q$ 又是 x^r 的函数，所以 x^p 是 x^r 的函数。根据链式求导规则以及题10和题11的结果有

$$\frac{\partial x^p}{\partial x^r}=\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^q}\frac{\partial \overline{x}^q}{\partial x^r}=\delta^p_q\delta^q_r=\delta^p_r \qquad (证毕)$$

13. 若 $\overline{A}^p=\dfrac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^q}A^q$，试证 $A^q=\dfrac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^p}\overline{A}^p$。

证：用$\dfrac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^p}$乘 $\overline{A}^p=\dfrac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^q}A^q$

则
$$\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^p}\overline{A}^p=\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^p}\frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^q}A^q=\frac{\partial x^r}{\partial x^q}A^q=\delta^r_q A^q=A^r$$

令 $r=q$，就是上题的结果。上面的证明可用于一般的情况，有横和无横的量可以互换。 (证毕)

14. 证明 δ^p_q 是二阶混合张量。

证：若 δ^p_q 是二阶混合张量，则应符合下列的变换律

$$\overline{\delta}^j_k=\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k}\delta^p_q$$

等式右边的$\dfrac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p}\dfrac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^k}=\delta^j_k$(见12题)。因为 $\overline{\delta}^j_k=\delta^j_k=1$，($j=k$)，$\overline{\delta}^j_k=\delta^j_k=0$($j\neq k$)，故证明了 δ^p_q 是二阶混合张

量，符号用得正合适。

注意，我们有时用$\delta_{pq}=\begin{cases}1 & (p=q)\\0 & (p\neq q)\end{cases}$作为克罗内克符号$\delta$，尽管它不是二阶协逆张量。 （证毕）

张量的基本运算

15. 若 $A^{pq}_{\cdot\cdot r}$ 和 $B^{pq}_{\cdot\cdot r}$ 是张量，试证它们的和、差均为张量。

证： 由假设 $A^{pq}_{\cdot\cdot r}$、$B^{pq}_{\cdot\cdot r}$ 是张量，则

$$\bar{A}^{jk}_{\cdot\cdot l}=\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^l}A^{pq}_{\cdot\cdot r}$$

$$\bar{B}^{jk}_{\cdot\cdot l}=\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^l}B^{pq}_{\cdot\cdot r}$$

相加

$$(\bar{A}^{jk}_{\cdot\cdot l}+\bar{B}^{jk}_{\cdot\cdot l})=\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^l}(A^{pq}_{\cdot\cdot r}+B^{pq}_{\cdot\cdot r})$$

相减

$$(\bar{A}^{jk}_{\cdot\cdot l}-\bar{B}^{jk}_{\cdot\cdot l})=\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^l}(A^{pq}_{\cdot\cdot r}-B^{pq}_{\cdot\cdot r})$$

所以 $A^{pq}_{\cdot\cdot r}+B^{pq}_{\cdot\cdot r}$ 和 $A^{pq}_{\cdot\cdot r}-B^{pq}_{\cdot\cdot r}$ 是和 $A^{pq}_{\cdot\cdot r}$、$B^{pq}_{\cdot\cdot r}$ 同阶同类型的张量。 （证毕）

16. 若 $A^{pq}_{\cdot\cdot r}$ 和 B^s_t 是张量，试证 $C^{pqs}_{\cdot\cdot\cdot rt}=A^{pq}_{\cdot\cdot r}B^s_t$ 也是张量。

证： 因为 $A^{pq}_{\cdot\cdot r}$、B^s_t 是张量。

$$\bar{A}^{jk}_{\cdot\cdot l}=\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^l}A^{pq}_{\cdot\cdot r}$$

$$\bar{B}^m_n=\frac{\partial\bar{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial\bar{x}^n}B^s_t$$

相乘

$$\bar{A}^{pq}_{\cdot\cdot r}\bar{B}^m_n=\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^l}\frac{\partial\bar{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial\bar{x}^n}A^{pq}_{\cdot\cdot r}B^s_t$$

这表明 $A^{pq}_{\cdot\cdot r}B^s_t$ 是 p,q,s 逆变和 r、t 协变的五阶张量，记

为 $C^{pqs}_{\cdot\cdot\cdot rt}$。我们称 $C^{pqs}_{\cdot\cdot\cdot rt} = A^{pq}_{\cdot\cdot r}B^s_t$ 为 $A^{pq}_{\cdot\cdot r}$ 和 B^s_t 的外积。

（证毕）

17. 令 $A^{pq}_{\cdot\cdot rst}$ 是一张量，(a) 选 $p=t$，试证 $A^{pq}_{\cdot\cdot rsp}$ 是张量，并问是几阶张量？式中用了求和约定。(b) 选 $p=t$ 和 $q=s$，试证 $A^{pq}_{\cdot\cdot rqp}$ 是张量，它的阶次为多少？

证： (a) 因为 $A^{pq}_{\cdot\cdot rst}$ 是张量

$$\bar{A}^{jk}_{\cdot\cdot lmn} = \frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^l}\frac{\partial x^s}{\partial\bar{x}^m}\frac{\partial x^t}{\partial\bar{x}^n}A^{pq}_{\cdot\cdot rst} \qquad (A17.1)$$

$$\bar{A}^{jk}_{\cdot\cdot lmj} = \frac{\partial x^t}{\partial\bar{x}^j}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^l}\frac{\partial x^s}{\partial\bar{x}^m}A^{pq}_{\cdot\cdot rst}$$

$$= \delta^t_p\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^l}\frac{\partial x^s}{\partial\bar{x}^m}A^{pq}_{\cdot\cdot rst}$$

$$= \frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^l}\frac{\partial x^s}{\partial\bar{x}^m}A^{pq}_{\cdot\cdot rsp}$$

$$= \frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^l}\frac{\partial x^s}{\partial\bar{x}^m}B^q_{\cdot rs}$$

故 $A^{pq}_{\cdot\cdot rsp}$（即 B^q_{rs}）是三阶张量。张量中逆变指标与协变指标相同，取代并求和的过程叫做缩并。缩并一次，张量降阶二次。

(b) $j=n$, $k=m$ 则式(A17.1)为

$$\bar{A}^{jk}_{\cdot\cdot lkj} = \frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^l}\frac{\partial x^s}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial x^t}{\partial\bar{x}^j}A^{pq}_{\cdot\cdot rst}$$

$$= \frac{\partial x^t}{\partial\bar{x}^j}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^s}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^l}A^{pq}_{\cdot\cdot rst}$$

$$= \delta^t_p\delta^s_q\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^l}A^{pq}_{\cdot\cdot rst}$$

$$= \frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^l}A^{pq}_{\cdot\cdot rqp} = \frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^l}C_r$$

$A^{pq}_{\cdot\cdot rqp}$（即 C_r）是一阶张量，两次缩并降阶四次。

18. 试证张量 A^p_q 的缩并是标量或不变量。

证： $$\overline{A}^{j}_{\cdot k}=\frac{\partial \overline{x}^{j}}{\partial x^{p}}\frac{\partial x^{q}}{\partial \overline{x}^{k}}A^{p}_{\cdot q}$$

令 $j=k$ 并求和

$$\overline{A}^{j}_{\cdot j}=\frac{\partial \overline{x}^{j}}{\partial x^{p}}\frac{\partial x^{q}}{\partial \overline{x}^{j}}A^{p}_{\cdot q}=\delta^{p}_{q}A^{p}_{q}=A^{p}_{\cdot p}$$

$\overline{A}^{j}_{j}=A^{p}_{\cdot p}$是不变量，因 $A^{p}_{\cdot p}$是由二阶张量缩并一次而成，二阶张量降阶两次，成为零阶，故可定义不变量为零阶张量。 （证毕）

19. 试证张量 A^{p} 和 B_{q} 外积的缩并是不变量。

证： 因 A^{p} 和 B_{q} 是张量

$$\overline{A}^{j}=\frac{\partial \overline{x}^{j}}{\partial x^{p}}A^{p},\quad \overline{B}_{k}=\frac{\partial x^{q}}{\partial \overline{x}^{k}}B_{q}$$

则 $$\overline{A}^{j}\overline{B}_{k}=\frac{\partial \overline{x}^{j}}{\partial x^{p}}\frac{\partial x^{q}}{\partial \overline{x}^{k}}A^{p}B_{q}$$

缩并（代入 $j=k$ 并求和）

$$\overline{A}^{j}\overline{B}_{j}=\frac{\partial \overline{x}^{j}}{\partial x^{p}}\frac{\partial x^{q}}{\partial \overline{x}^{j}}A^{p}B_{q}=\delta^{q}_{p}A^{p}B_{q}=A^{p}B_{q}$$

故得 $A^{p}B_{p}$ 是不变量。张量相乘以及缩并的过程叫做内乘，其结果叫做内积。因为 $A^{p}B_{p}$ 是标量，所以通常又称为矢量 A^{p} 和 B_{q} 的标积。 （证毕）

20. 试证张量 $A^{p}_{\cdot r}$ 和 $B^{qs}_{\cdot\cdot t}$ 的任一内积是三阶张量。

证： 证法一：$A^{p}_{\cdot r}$ 和 $B^{qs}_{\cdot\cdot t}$ 的外积是 $A^{p}_{\cdot r}B^{qs}_{\cdot\cdot t}$

令 $p=t$，缩并，求和。证其结果 $A^{p}_{\cdot r}B^{qs}_{\cdot\cdot p}$ 是三阶张量。根据假设

$$\overline{A}^{j}_{\cdot k}=\frac{\partial \overline{x}^{j}}{\partial x^{p}}\frac{\partial x^{r}}{\partial \overline{x}^{k}}A^{p}_{\cdot r},\quad \overline{B}^{lm}_{\cdot\cdot n}=\frac{\partial \overline{x}^{l}}{\partial x^{q}}\frac{\partial \overline{x}^{m}}{\partial x^{s}}\frac{\partial x^{t}}{\partial \overline{x}^{n}}B^{qs}$$

相乘，令 $j=n$，求和得

$$\overline{A}^{j}_{\cdot k}\overline{B}^{lm}_{\cdot\cdot j}=\frac{\partial \overline{x}^{j}}{\partial x^{p}}\frac{\partial x^{r}}{\partial \overline{x}^{k}}\frac{\partial \overline{x}^{l}}{\partial x^{q}}\frac{\partial \overline{x}^{m}}{\partial x^{s}}\frac{\partial x^{t}}{\partial \overline{x}^{j}}A^{p}_{\cdot r}B^{qs}_{\cdot\cdot t}$$

$$=\delta^{t}_{p}\frac{\partial x^{r}}{\partial \overline{x}^{k}}\frac{\partial \overline{x}^{l}}{\partial x^{q}}\frac{\partial \overline{x}^{m}}{\partial x^{s}}A^{p}_{\cdot r}B^{qs}_{\cdot\cdot t}$$

$$=\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^q}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s}A^p_{\cdot r}B^{qs}_{\cdot\cdot p}$$

上式表明 $A^p_{\cdot r}B^{qs}_{\cdot\cdot p}$ 是三阶张量。同样可证，对 q 和 r 或 s 和 r 缩并，其任意内积都是三阶张量。

证法二：两张量的外积仍是张量，外积张量的阶是两相乘张量阶数的和，故 $A^p_{\cdot r}B^{qs}_{\cdot\cdot t}$ 的阶数是 $3+2=5$。因为缩并一次，降阶二次，因此，$A^p_{\cdot r}B^{qs}_{\cdot\cdot t}$ 任意缩并一次，张量的阶数是 $5-2=3$。（证毕）

21. $B^{qn}_{\cdot\cdot r}$ 为任意张量，若有量 $X(p,q,r)$ 使得 $X(p,q,r)B^{qn}_{\cdot\cdot r}=0$，试证 $X(p,q,r)=0$。

证：因 $B^{qn}_{\cdot\cdot r}$ 是任意张量，选一个不为零的特殊分量（例如 $q=2,r=3$ 的其中一个），而其他分量均为零，则 $X(p,2,3)B^{2n}_{\cdot\cdot 3}=0$，因 $B^{2n}_{\cdot\cdot 3}\neq 0$，所以 $X(p,2,3)=0$。同理可选 q 和 r 的所有任意组合，均可得 $X(p,q,r)=0$。故命题得证。（证毕）

22. $A(p,q,r)$ 是坐标系 x^i 中的一个量，$A(p,q,r)B^{qs}_{\cdot\cdot r}=C^s_{\cdot p}$，式中 B^{qs}_r 是一任意张量，C^s_p 是二阶张量，试证 $A(p,q,r)$ 是张量。

证：在变换了的坐标系 $\bar{x}^i$ 中，$\bar{A}(j,k,l)\bar{B}^{km}_{\cdot\cdot l}=\bar{C}^m_{\cdot j}$

于是

$$\bar{A}(j,k,l)\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}B^{qs}_{\cdot\cdot r}=\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}C^s_{\cdot p}$$

$$=\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}A(p,q,r)B^{qs}_{\cdot\cdot r}$$

或 $$\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s}\left[\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}\bar{A}(j,k,l)-\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}A(p,q,r)\right]B^{qs}_{\cdot\cdot r}=0$$

用 $\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^m}$ 内乘（即用 $\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^t}$ 乘，并用 $t=m$ 缩并）得

$$\delta^n_s\left[\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}\bar{A}(j,k,l)-\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}A(p,q,r)\right]B^{qs}_{\cdot\cdot r}=0$$

或 $\left[\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}\bar{A}(j,k,l)-\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}A(p,q,r)\right]B^{qn}_{r}=0$

因为 B^{qn}_{r} 是一任意张量，根据上题有，

$$\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}\bar{A}(j,k,l)-\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}A(p,q,r)=0$$

用 $\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^r}$ 内乘，得

$$\delta^k_m\delta^n_l\bar{A}(j,k,l)-\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^r}A(p,q,r)=0$$

或

$$\bar{A}(j,m,n)=\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^r}A(p,q,r)$$

证明了 $A(p,q,r)$ 是张量，正好用符号 $A^r_{\cdot pq}$ 表示。

（证毕）

本题是商定律的特殊情况，商定律的内容是：若 X 与任意张量 B 的内积是一张量 C，则 X 是张量。

对称张量和反对称张量

23. 若张量 B^{pqr}_{s} 在一个坐标系中，关于 p 和 q 是对称的（反对称的），试证明它在任一坐标系中关于 p 和 q 仍保持对称（反对称）。

证： 因为只涉及到指标 p 和 q，我们也只要就 B^{pq} 作证明。

(a) 若 B^{pq} 是对称的，$B^{pq}=B^{qp}$

则 $\bar{B}^{jk}=\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}B^{pq}=\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}B^{qp}=\bar{B}^{kj}$

同理可证在 $\bar{x}^i$ 坐标系中 B_{pq} 也保持对称。

(b) 若 B^{pq} 是反对称的，$B^{pq}=-B^{qp}$

则 $\bar{B}^{jk}=\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}B^{pq}=-\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}B^{qp}=-\bar{B}^{kj}$

也可证明在 $\bar{x}^i$ 坐标系中 B_{pq} 保持反对称。（证毕）

上述结论，当然对其他的对称（反对称）张量都有效。

24. 试证：每个张量都可表为一对协变或逆变对称张量与反对称

张量之和。

证： 考察张量 B^{pq}，有

$$B^{pq}=\frac{1}{2}(B^{pq}+B^{qp})+\frac{1}{2}(B^{pq}-B^{qp})$$

但 $R^{pq}=\frac{1}{2}(B^{pq}+B^{qp})=R^{qp}$ 是对称的，

$S^{pq}=\frac{1}{2}(B^{pq}-B^{qp})=-S^{qp}$ 是反对称的。

同理，上述结论对任何张量都成立。

或 $$B=\frac{1}{2}(B+B^T)+\frac{1}{2}(B-B^T)=R+S$$

R 是对称的，S 是反对称的。（证毕）

25. 若 $\Phi=a_{jk}A^jA^k$，试证：通常能将左式写成 $\Phi=b_{jk}A^jA^k$，式中 b_{jk} 是对称的。

证： $\Phi=a_{jk}A^jA^k=a_{kj}A^kA^j=a_{kj}A^jA^k$

则 $2\Phi=a_{jk}A^jA^k+a_{kj}A^jA^k=(a_{jk}+a_{kj})A^jA^k$

且 $\Phi=\frac{1}{2}(a_{jk}+a_{kj})A^jA^k=b_{jk}A^jA^k$

式中 $b_{jk}=\frac{1}{2}(a_{jk}+a_{kj})=b_{kj}$ 是对称的。（证毕）

矩　阵

26. 写出矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 4 & -2 & 3\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ -4 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ 的和 $S=A+B$，差 $D=A-B$，积 $P=AB$，$Q=BA$。

解： $$S=A+B=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 4 & -2 & 3\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ -4 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5 & 1 & -3\\ 0 & -1 & 5\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$D=A-B=\begin{pmatrix}3&1&-2\\4&-2&3\\-2&1&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&-1\\-4&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&-1\\8&-3&1\\-3&2&-1\end{pmatrix}$$

$$P=AB=\begin{pmatrix}3&1&-2\\4&-2&3\\-2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&-1\\-4&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&3&-1\\19&-5&-8\\-9&2&4\end{pmatrix}$$

$$Q=BA=\begin{pmatrix}2&0&-1\\-4&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&-2\\4&-2&3\\-2&1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}8&1&-3\\-12&-4&9\\-1&3&-5\end{pmatrix}$$

表明 $AB\neq BA$，矩阵的乘法一般是不可交换的。

27. 若 $A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\end{pmatrix}$ 和 $B=\begin{pmatrix}-1&2\\3&-2\end{pmatrix}$，试证 $(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$。

证： $A+B=\begin{pmatrix}1&3\\2&1\end{pmatrix}$，$A-B=\begin{pmatrix}3&-1\\-4&5\end{pmatrix}$，于是 $(A+B)$

$$(A-B)=\begin{pmatrix}1&3\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\-4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9&14\\2&3\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5\\-5&8\end{pmatrix}$$

$$B^2=\begin{pmatrix}-1&2\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-6\\-9&10\end{pmatrix}$$

于是 $A^2-B^2=\begin{pmatrix}3&5\\-5&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7&-6\\-9&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&11\\4&-2\end{pmatrix}$

因此$(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$，但$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$ （证毕）

28. 用矩阵符号写出变换方程：(a) 协变矢量，(b) 二阶逆变张量，设 $N=3$。

解： (a) 变换方程 $\bar{A}_p=\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p}A_q$，可写成

$$\begin{pmatrix}\bar{A}_1\\ \bar{A}_2\\ \bar{A}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1}\\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2}\\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\\ A_3\end{pmatrix}$$

可以用上述的列矢量表示，同样也可用行矢量表示。

$$(\bar{A}_1\quad \bar{A}_2\quad \bar{A}_3)=(A_1\quad A_2\quad A_3)\begin{pmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3}\\ \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3}\\ \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3}\end{pmatrix}$$

(b) 变换方程 $\bar{A}^{pr}=\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s}A^{qs}$可写成

$$\begin{pmatrix}\bar{A}^{11} & \bar{A}^{12} & \bar{A}^{13}\\ \bar{A}^{21} & \bar{A}^{22} & \bar{A}^{23}\\ \bar{A}^{31} & \bar{A}^{32} & \bar{A}^{33}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3}\\ \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3}\\ \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{11} & A^{12} & A^{13}\\ A^{21} & A^{22} & A^{23}\\ A^{31} & A^{32} & A^{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1}\\ \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2}\\ \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3}\end{pmatrix}$$

这些结论可推广到 $N>3$，但是对于高阶张量，用矩阵符号

是失败的。

线元和度量张量

29. 若 $ds^2=g_{jk}dx^jdx^k$ 是不变量，试证 g_{jk}是二阶协变张量。

证： 由例 25，$\Phi=ds^2$，$A^j=dx^j$ 和 $A^k=dx^k$，g_{jk}可以选为对称的。还因为 ds^2 是不变量，

$$\bar{g}_{pq}d\bar{x}^pd\bar{x}^q=g_{jk}dx^jdx^k=g_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^p}d\bar{x}^p\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^q}d\bar{x}^q$$

$$=g_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^p}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^q}d\bar{x}^pd\bar{x}^q$$

于是 $\bar{g}_{pq}=\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^p}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^q}g_{jk}$，所以 g_{jk}是二阶对称协变张量，称为度量张量。

30. 试求：(a) 柱面坐标系，(b) 球面坐标系中的度量张量的矩阵表达式。

解： (a) 柱面坐标系

$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z$

$dx=-\rho\sin\varphi d\varphi+\cos\varphi d\rho,\ dy=\rho\cos\varphi d\varphi+\sin\varphi d\rho,$

$dz=dz$

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=(-\rho\sin\varphi d\varphi+\cos\varphi d\rho)^2$$
$$+(\rho\cos\varphi d\varphi+\sin\varphi d\rho)^2+(dz)^2$$
$$=(d\rho)^2+\rho^2(d\varphi)^2+(dz)^2$$

若 $x^1=\rho,\ x^2=\varphi,\ x^3=z$，则 $g_{11}=1,\ g_{22}=\rho^2,\ g_{33}=1$，其余均为零。

故度量张量的矩阵形式为

$$g_{jk}=\begin{pmatrix}g_{11}&g_{12}&g_{13}\\g_{21}&g_{22}&g_{23}\\g_{31}&g_{32}&g_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\rho^2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(b) 球面坐标系

$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta$

$$dx = -r\sin\theta\sin\varphi d\varphi + r\cos\theta\cos\varphi d\theta + \sin\theta\cos\varphi dr$$

$$dy = r\sin\theta\cos\varphi d\varphi + r\cos\theta\sin\varphi d\theta + \sin\theta\sin\varphi dr$$

$$dz = -r\sin\theta d\theta + \cos\theta dr$$

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

$$= (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2\sin^2\theta(d\varphi)^2$$

若 $x^1 = r$，$x^2 = \theta$，$x^3 = \varphi$，则度量张量的矩阵表达式可写成 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}$ 一般，对于正交坐标系，$g_{jk} = 0$ $(j \neq k)$。

31. (a) 用第二行及其余子式表示行列式 $g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$，

(b) 说明 $g_{jk}G(j,k) = g$，式中 $G(j,k)$ 是 g 中 g_{jk} 的余子式，这里只对 k 求和。

解：(a) g_{jk} 的余子式是从行列式 g 中划去 g_{jk} 所在的行和列，而得的行列式，并带有 $(-1)^{j+k}$ 的正负号，于是

$$g_{21}\text{的余子式} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

$$g_{22}\text{的余子式} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{31} & g_{33} \end{vmatrix}$$

$$g_{23}\text{的余子式} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{31} & g_{32} \end{vmatrix}$$

将这些余子式分别记为 $G(2,1)$、$G(2,2)$、$G(2,3)$，由行列式的基本原理，得

$$g_{21}G(2,1) + g_{22}G(2,2) + g_{23}G(2,3) = g$$

(b) 应用(a)的结果于任意行或列，有 $g_{jk}G(j,k) = g$，式中只对 k 求和。

这个结论对 N 阶行列式 $g = |g_{jk}|$ 均有效。

32. (a) 试证 $g_{21}G(3,1)+g_{22}G(3,2)+g_{23}G(3,3)=0$；

(b) 试证 $g_{jk}G(p,k)=0\ (j\neq p)$。

证：(a) 行列式 $\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \end{vmatrix}=0$

因为后两行相同，按最后一行展开该行列式

$$g_{21}G(3,1)+g_{22}G(3,2)+g_{23}G(3,3)=0$$

(b) 若行列式中任意两行（或列）相同，由(a)证明的结果可知 $g_{jk}G(p,k)=0\ (j\neq p)$，该结论对 N 阶行列式均有效。 （证毕）

33. 定义 $g^{jk}=\dfrac{G(j,k)}{g}$，式中 $G(j,k)$ 是 g_{jk} 的余子式，且行列式 $g=|g_{jk}|\neq 0$，试证 $g_{jk}g^{pk}=\delta_j^p$。

证：由例题 31 知 $g_{jk}\dfrac{G(j,k)}{g}=1$ 或 $g_{jk}g^{jk}=1$，式中只对 k 求和。

由题 32 知 $g_{jk}\dfrac{G(p,k)}{g}=0$ 或 $g_{jk}g^{pk}=0$（若 $p\neq j$）

于是 $g_{jk}g^{pk}=\delta_j^p=\begin{cases}1 & (p=j)\\ 0 & (p\neq j)\end{cases}$

虽然我们已经用了符号 g^{jk}，但并未说明它的意义，也未证明它是二阶逆变张量。例题 34 将要证明它是张量，注意余子式写成 $G(j,k)$，而不写成 G^{jk}，因为在通常的意义下，它不是张量。而在下面的例题中就证明了它是二阶逆变张量，用符号 G^{jk} 的概念展开张量正合适。

34. 试证 g^{jk} 是二阶对称逆变张量。

证：因为 g_{jk} 是对称的，$G(j,k)$ 是对称的，所以 $g^{jk}=\dfrac{G(j,k)}{g}$ 是对称的。若 B^p 是一任意逆变矢量，$B_q=g_{pq}B^p$ 是任意协变矢量，用 g^{jq} 乘上式，

$$g^{jq}B_q=g^{jq}g_{pq}B^p=\delta_p^jB^p=B^j$$

或 $$B^j = g^{ji} B_i$$

因为 B_i 是任意矢量，由商定律可知，g^{iq} 是二阶逆变张量，张量 g^{jk} 叫做共轭度量张量。 （证毕）

35. 求（a）柱面坐标系和（b）球面坐标系中的共轭度量张量。

解： （a）由题 30(a)有 $g=|g_{jk}|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \rho^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\rho^2$

$$g^{11}=\frac{g_{11}\text{的余子式}}{g}=\frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix}\rho^2 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

$$g^{22}=\frac{g_{22}\text{的余子式}}{g}=\frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1/\rho^2$$

$$g^{33}=\frac{g_{33}\text{的余子式}}{g}=\frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & \rho^2\end{vmatrix}=1$$

$$g^{12}=\frac{g_{12}\text{的余子式}}{g}=\frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0,\ g^{jk}=0\ (j\neq k)$$

故得柱面坐标系中共轭度量张量的矩阵形式有

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\rho^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

（b）由例题 30(b)有 $g=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta\end{vmatrix}=r^4\sin^2\theta$

与(a)相似，可求得

$g^{11}=1$，$g^{22}=1/r^2$，$g^{33}=1/r^2\sin^2\theta$ 而 $g^{jk}=0$ $(j\neq k)$，所以球面坐标系中的共轭度量张量的矩阵形式为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/r^2 & 0\\ 0 & 0 & 1/r^2\sin^2\theta\end{pmatrix}$

36. 试求符合 $ds^2=5(dx^1)^2+3(dx^2)^2+4(dx^3)^2-6dx^1dx^2+4dx^2dx^3$ 的 g 和 g^{jk}。

解： (a) $g_{11}=5$，$g_{22}=3$，$g_{33}=4$，$g_{12}=-3$，$g_{23}=2$，$g_{12}=g_{21}$，$g_{23}=g_{32}$，$g_{13}=g_{31}=0$

所以
$$g=\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}=4$$

(b) g_{jk}的余子式$G(j,k)$是

$G(1,1)=8$，$G_{22}=20$，$G_{33}=6$，$G(1,2)=G(2,1)=12$，$G(2,3)=G(3,2)=-10$，$G(1,3)=g(3,1)=-6$

则有 $g^{11}=2$，$g^{22}=10$，$g^{33}=3/2$，$g^{12}=g^{21}=3$，$g^{23}=g^{32}=-5/2$，$g^{13}=g^{31}=-3/2$

注意：矩阵(g_{jk})和(g^{jk}) 的积是单位矩阵 I

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3/2 \\ 3 & 10 & -5/2 \\ -3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

相伴张量

37. 若 $A_j=g_{jk}A^k$，试证 $A^k=g^{jk}A_j$。

证： 用 g^{jq}乘 $A_j=g_{jk}A^k$ 等式的两边得

$$g^{jq}A_j=g^{jq}g_{jk}A^k=\delta^q_kA^k=A^q$$

即
$$A^q=g^{jq}A_j \quad 或 \quad A^k=g^{jk}A_j$$

称一阶张量 A_j 和 A^k 为相伴，它们分别表示矢量的协变和逆变分量。 （证毕）

38. 试证：(a) $L^2=g_{pq}A^pA^q$ 是不变量，(b) $L^2=g^{pq}A_pA_q$。

证： (a) 令 A_j 和 A^k 分别是矢量的协变和逆变分量，则

$$\overline{A}_p=\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^p}A_j,\quad \overline{A}^q=\frac{\partial \overline{x}^q}{\partial x^k}A^k$$

$$\overline{A}_p\overline{A}^p=\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^p}\frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^k}A_jA^k=\delta^j_kA_jA^k=A_kA^k=A_jA^j$$

所以 A_jA^j 是不变量，记为 L^2，L^2 可写成

$$L^2=A_jA^j=g_{jk}A^kA^j=g_{pq}A^pA^q$$

(b) 由上述表明 $L^2=A_jA^j=A_jg^{kj}A_k=g^{kj}A_jA_k=g^{pq}A_pA_q$ 标量或不变量 $L=\sqrt{A_pA^p}$ 称为具有协变分量 A_p 和逆变分量 A^q 的矢量的大小或长度。

（证毕）

39. 若 A^p 和 B^q 是矢量，(a) 试证 $g_{pq}A^pB^q$ 是不变量，

(b) 试证：$\dfrac{g_{pq}A^pB^q}{\sqrt{(A^pA_p)(B^qB_q)}}$ 是不变量。

证：(a) 因为两矢量的标积是不变量，即 A^pB_p 是不变量，所以

$$A^pB_p=A^pg_{pq}B^q=g_{pq}A^pB^q \text{ 是不变量；}$$

(b) 因为 A^pA_p 和 B^qB_q 是不变量，$g_{pq}A^pB^q$ 是不变量，

所以 $\dfrac{g_{pq}A^pB^q}{\sqrt{(A^pA_p)(B^qB_q)}}$ 是不变量

我们定义 $\cos\theta=\dfrac{g_{pq}A^pB^q}{\sqrt{(A^pA_p)(B^qB_q)}}$

为矢量 A^p 和 B^q 之间夹角的余弦，若 $g_{pq}A^pB^q=A^pB_p=0$，则两矢量叫做正交的。（证毕）

40. 建立下列相伴张量的关系：

(a) A^{jkl} 和 A_{pqr}，(b) $A_{j\cdot l}^{\cdot k}$ 和 A^{qkr}，(c) $A^{p\cdot rs}_{\cdot q\cdots t}$ 和 $A^{\cdots sl}_{jqk}$。

解：(a) $A^{jkl}=g^{jp}g^{kq}g^{lr}A_{pqr}$ 或 $A_{pqr}=g_{jp}g_{kq}g_{lr}A^{jkl}$

(b) $A_{j\cdot l}^{\cdot k}=g_{jq}g_{lr}A^{qkr}$ 或 $A^{qkr}=g^{jq}g^{lr}A_{j\cdot l}^{\cdot k}$

(c) $A^{p\cdot rs}_{\cdot q\cdots t}=g^{pj}g^{rk}g_{tl}A^{\cdots sl}_{jqk}$ 或 $A^{\cdots sl}_{jqk}=g_{pj}g_{rk}g^{tl}A^{p\cdot rs}_{\cdot q\cdots t}$

41. 试证在三维曲线坐标系中 θ_{12}，θ_{23} 和 θ_{31} 的余弦是：

$$\cos\theta_{12}=\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}},\quad \cos\theta_{23}=\frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}g_{33}}},\quad \cos\theta_{31}=\frac{g_{31}}{\sqrt{g_{33}g_{11}}}$$

证：方法一：沿曲线坐标 x^1，x^2=常数，x^3=常数，则构成度量形式

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 \text{或} \frac{dx^1}{ds} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}$$

于是沿 x^1 的单位切矢量为 $A_1^r = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\delta_1^r$

类似地可得沿曲线坐标 x^2, x^3 的单位切矢量为

$$A_2^r = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\delta_2^r, \quad A_3^r = \frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\delta_3^r$$

A_1^r 和 A_2^r 之间夹角的余弦

$$\cos\theta_{12} = g_{pq}A_1^p A_2^q = g_{pq}\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\delta_1^p\delta_2^q = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}$$

同理可证后两式。

方法二：$g_1 \cdot g_2 = |g_1||g_2|\cos\theta_{12}$，$\cos\theta_{12} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}$。 （证毕）

42. 试证正交坐标系中 $g_{12}=g_{23}=g_{31}=0$。

证：用 $\theta_{12}=\theta_{23}=\theta_{31}=90°$代入例题 41 中，即可得命题的结论。并可用 $g_{pq}=g_{qp}$的事实，得 $g_{21}=g_{32}=g_{13}=0$

（证毕）

43. 试证正交坐标系中 $g_{11}=\frac{1}{g^{11}}$，$g_{22}=\frac{1}{g^{22}}$，$g_{33}=\frac{1}{g^{33}}$。

证：从 33 题可知 $g^{pr}g_{rq}=\delta_q^p$

若 $p=q=1, g^{1r}g_{r1}=1$ 或 $g^{11}g_{11}+g^{12}g_{21}+g^{13}g_{31}=1$

因为 $g_{pq}=0$ $(p\neq q)$ 故有 $g^{11}g_{11}=1$ 即 $g_{11}^r=\frac{1}{g^{11}}$

同理可证，若$p=q=2$，有 $g_{22}=\frac{1}{g^{22}}$

$p=q=3$，有 $g_{33}=\frac{1}{g^{33}}$ （证毕）

克雷斯托菲符号

44. 证明 (a) $[pq,r]=[qp,r]$, (b) $\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} s \\ qp \end{Bmatrix}$, (c) $[pq,r]=g_{rs}\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}$

证： 证法一：

(a) $$[pq,r]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^q}+\frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p}-\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p}+\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^q}-\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r}\right)=[qp,r]$$

(b) $$\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}=g^{sr}[pq,r]=g^{sr}[qp,r]=\begin{Bmatrix} s \\ qp \end{Bmatrix}$$

(c) $$g_{ks}\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}=g_{ks}g^{sr}[pq,r]=\delta_k^r[pq,r]=[pq,k]$$

或 $[pq,k]=g_{ks}\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}$ 即 $[pq,r]=g_{rs}\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}$

证法二：

因为 $\frac{\partial g_i}{\partial x^j}=\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}g_k$, $\quad \frac{\partial g^k}{\partial x^j}=-\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}g^i$

所以 $\frac{\partial g_i}{\partial x^j}\cdot g^k=\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}$, $\quad \frac{\partial g_i}{\partial x^j}\cdot g_k=g_{kr}\begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix}g^r$

$$\{ij,k\}=g_{kr}\begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial x^j}=\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial r}{\partial x^i}\right)=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial r}{\partial x^j}\right)=\frac{\partial g_j}{\partial x^i}$$

$$\{ij,k\}=\{ji,k\},\quad \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} k \\ ji \end{Bmatrix}.$$ （证毕）

45. 试证 (a) $\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^m}=[pm,q]+[qm,p]$；

(b) $\frac{\partial g^{pq}}{\partial x^m}=-g^{pn}\begin{Bmatrix} q \\ mn \end{Bmatrix}-g^{qn}\begin{Bmatrix} p \\ mn \end{Bmatrix}$；

(c) $\begin{Bmatrix} p \\ pq \end{Bmatrix}=\frac{\partial}{\partial x^q}\ln\sqrt{g}$

证：证法一：

(a) $[pm,q]+[qm,p]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{mq}}{\partial x^p}-\frac{\partial g_{pm}}{\partial x^q}\right)$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{qp}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{mp}}{\partial x^p}-\frac{\partial g_{qm}}{\partial x^q}\right)=\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^m}$$

(b) $\frac{\partial}{\partial x^m}(g^{jk}g_{ij})=\frac{\partial}{\partial x^m}(\delta_i^k)=0$

$$g^{jk}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}+\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m}g_{ij}=0,\quad g^{jk}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}=-\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m}g_{ij}$$

用 g^{ir} 乘等式的两边

$$g^{ir}g_{ij}\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m}=-g^{ir}g^{jk}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}$$

$$\delta_j^r\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m}=\frac{\partial g^{rk}}{\partial x^m}=-g^{ir}g^{jk}([im,j]+[jm,i])$$

$$=-g^{ir}\left\{\begin{matrix}k\\im\end{matrix}\right\}-g^{jk}\left\{\begin{matrix}r\\jm\end{matrix}\right\}$$

用 p,q,n,n 代替 r,k,i,j 就得

$$\frac{\partial g^{pq}}{\partial x^m}=-g^{pn}\left\{\begin{matrix}q\\nm\end{matrix}\right\}-g^{qn}\left\{\begin{matrix}p\\nm\end{matrix}\right\}=-g^{pn}\left\{\begin{matrix}q\\mn\end{matrix}\right\}-g^{qn}\left\{\begin{matrix}p\\mn\end{matrix}\right\}$$

证法二：

$$\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^m}=\frac{\partial \mathbf{g}_p}{\partial x^m}\cdot\mathbf{g}_q+\frac{\partial \mathbf{g}_q}{\partial x^m}\cdot\mathbf{g}_p=\{pm,q\}+\{qm,p\}$$

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}=\frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial x^k}\cdot\mathbf{g}^j+\frac{\partial \mathbf{g}^j}{\partial x^k}\cdot\mathbf{g}^i=-\left\{\begin{matrix}i\\mk\end{matrix}\right\}\mathbf{g}^m\cdot\mathbf{g}^j-\left\{\begin{matrix}j\\mk\end{matrix}\right\}\mathbf{g}^m\cdot\mathbf{g}^i$$

$$=-g^{mj}\left\{\begin{matrix}i\\mk\end{matrix}\right\}-g^{mi}\left\{\begin{matrix}j\\mk\end{matrix}\right\}$$

(c) 根据例题 31，$g=g_{jk}G(j,k)$（只对 k 求和）

因为 $G(j,k)$ 不包含 g_{jk}，且 $\frac{\partial g}{\partial g_{jk}}=G(j,k)$，于是对 j 和 r 求和

$$\frac{\partial g}{\partial x^m}=\frac{\partial g}{\partial g_{jk}}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m}=G(j,k)\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m}$$

$$=g\, g^{jk}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m}=g\, g^{jk}([jm,k]+[km,j])$$

$$=g\left[\begin{Bmatrix} j \\ jm \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} k \\ km \end{Bmatrix}\right]=2g\begin{Bmatrix} k \\ km \end{Bmatrix}$$

于是 $\dfrac{1}{2g}\dfrac{\partial g}{\partial x^m}=\begin{Bmatrix} k \\ km \end{Bmatrix}$ 或 $\begin{Bmatrix} p \\ pq \end{Bmatrix}=\dfrac{\partial}{\partial x^q}\ln\sqrt{g}$

证法二：

$$\sqrt{g}=\boldsymbol{g}_1\cdot(\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3)$$

$$\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^m}=\frac{\partial \boldsymbol{g}_1}{\partial x^m}\cdot(\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3)+\boldsymbol{g}_1\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_2}{\partial x^m}\times\boldsymbol{g}_3\right)$$

$$+\boldsymbol{g}_1\cdot\left(\boldsymbol{g}_2\times\frac{\partial \boldsymbol{g}_3}{\partial x^m}\right)$$

$$=\Gamma^i_{1m}\boldsymbol{g}_i\cdot(\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3)+\Gamma^i_{2m}\boldsymbol{g}_1\cdot(\boldsymbol{g}_i\times\boldsymbol{g}_3)$$

$$+\Gamma^i_{3m}\boldsymbol{g}_1\cdot(\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_i)$$

$$=\sqrt{g}\,(\Gamma^1_{1m}+\Gamma^2_{2m}+\Gamma^3_{3m})=\sqrt{g}\,\Gamma^k_{km}$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^m}=\Gamma^k_{km}$$ （证毕）

46. 推导(a)第一类和(b)第二类克雷斯托菲符号的变换律

解： (a) 因为 $\bar{g}_{jk}=\dfrac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\dfrac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}g_{pq}$

① $$\frac{\partial \bar{g}_{jk}}{\partial \bar{x}^m}=\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m}+\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^k\partial \bar{x}^m}g_{pq}$$

$$+\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}g_{pq}$$

对指标 j,k,m 和 p,q,r 进行依序轮换

② $$\frac{\partial \bar{g}_{km}}{\partial \bar{x}^j}=\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}+\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^m\partial \bar{x}^j}g_{qr}$$

$$+\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m}g_{qr}$$

③ $$\frac{\partial \bar{g}_{mj}}{\partial \bar{x}^k}=\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial g_{rp}}{\partial x^q}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}+\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j\partial \bar{x}^k}g_{rp}$$

$$+\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}g_{rp}$$

式②加式③，减去式①再乘$\frac{1}{2}$，利用第一类克雷斯托符号的定义，可得

④ $$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{g}_{km}}{\partial \bar{x}^j}+\frac{\partial \bar{g}_{mj}}{\partial \bar{x}^k}-\frac{\partial \bar{g}_{jk}}{\partial \bar{x}^m}\right)=[\overline{jk,m}]$$

$$\text{等式右边}=\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{rp}}{\partial x^q}+\frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p}-\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r}\right)+\frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^j\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^m}g_{pq}$$

$$=\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m}[pq,r]+\frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^m}g_{pq}$$

(b) 用 $\bar{g}^{nm}=\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^t}g^{st}$乘式(4)得

$$\bar{g}^{nm}[\overline{jk,m}]=\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^t}g^{st}[pq,r]+\frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^j\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^t}g^{st}g_{pq}$$

$$\text{于是}\left\{\begin{matrix}\overline{n}\\ jk\end{matrix}\right\}=\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\delta^r_t g^{st}[pq,r]+\frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\delta^q_t g^{st}g_{pq}$$

$$=\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\left\{\begin{matrix}s\\ pq\end{matrix}\right\}+\frac{\partial^2 p}{\partial \bar{x}^j\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^p}$$

$$\text{因为}\delta^r_t g^{st}[pq,r]=g^{sr}[pq,r]=\left\{\begin{matrix}s\\ pq\end{matrix}\right\}$$

$$\delta^q_t g^{st}g_{pq}=g^{sq}g_{pq}=\delta^s_p$$

47. 试证 $\frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^j\partial \bar{x}^k}=\left\{\begin{matrix}\overline{n}\\ jk\end{matrix}\right\}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^n}-\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\left\{\begin{matrix}m\\ pq\end{matrix}\right\}$

证：由例题 46 知：

$$\left\{\begin{matrix}\overline{n}\\ jk\end{matrix}\right\}=\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\left\{\begin{matrix}s\\ pq\end{matrix}\right\}+\frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^p}$$

用$\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^n}$乘上式得

$$\left\{\begin{matrix}\overline{n}\\ jk\end{matrix}\right\}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^n}=\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\delta^m_s\left\{\begin{matrix}s\\ pq\end{matrix}\right\}+\frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j\partial \bar{x}^k}\delta^m_p$$

故有 $$\frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} = \overline{\left\{ \begin{matrix} n \\ jk \end{matrix} \right\}} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^n} - \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \left\{ \begin{matrix} m \\ pq \end{matrix} \right\}$$ （证毕）

48. 求 $g_{pq}=0$（若 $p\neq q$）的空间中的(a)第一类和(b)第二类克雷斯托非符号的值。

解： (a) 若 $p=q=r$，则

$$[pq,r]=[pp,p]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p}+\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p}-\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p}$$

若 $p=q\neq r$，则

$$[pq,r]=[pp,r]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^p}+\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^p}-\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^r}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^r}$$

若 $p=r\neq q$，则

$$[pq,r]=[rq,r]=[pq,p]$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^q}+\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^p}-\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^p}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^q}$$

若 p,q,r 互异，则 $[pq,r]=0$（此处不用求和约定）。

(b) 由 43 题有 $g^{jj}=\frac{1}{g_{jj}}$，于是

若 $r\neq s$，则 $\left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\}=g^{sr}[pq,r]$

若 $r=s$，则 $g^{ss}[pq,s]=\frac{[pq,s]}{g_{ss}}$（不求和）

若 $p=q=s$，则 $\left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\}=\left\{ \begin{matrix} p \\ pp \end{matrix} \right\}=\frac{[pp,p]}{g_{pp}}=\frac{1}{2g_{pp}}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p}$
$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^p}\ln g_{pp}$

若 $p=q\neq s$，则 $\left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\}=\left\{ \begin{matrix} s \\ pp \end{matrix} \right\}=\frac{[pp,s]}{g_{ss}}=-\frac{1}{2g_{ss}}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^s}$

若 $p=s\neq q$，则 $\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} p \\ pq \end{Bmatrix}=\frac{[pq,p]}{g_{pp}}=\frac{1}{2g_{pp}}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^q}$

$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^q}\ln g_{pp}$

若 p,q,s 互异，则 $\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}=0$

49. 求(a)直角坐标、(b)柱面坐标和(c)球面坐标中第二类克雷斯托菲符号的表示式。

解：利用题 48 的结果，因为直角坐标系中，若 $p\neq q$ 时，$g_{pq}=0$，所以

(a) 直角坐标系中 $g_{pp}=1$，即 $\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}=0$

(b) 柱面坐标系 $x^1=\rho$，$x^2=\varphi$，$x^3=z$。由题 30 得 $g_{11}=1$，$g_{22}=\rho^2$，$g_{33}=1$ 不为零的克雷斯托菲符号只出现在 $p=2$ 时

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix}=g^{1r}[22,r]=g^{11}[22,1]=\frac{1}{g^{11}}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\partial \rho^2}{\partial \rho}=-\rho$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 21 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix}=g^{2r}[21,r]=g^{22}[21,2]$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \rho^2}{\partial \rho}\right)=\frac{1}{\rho}$$

还可直接算得，其他 24 个都为零。

(c) 球面坐标系中，$x^1=r$，$x^2=\theta$，$x^3=\varphi$。由题 30(b) 可知

$g_{11}=1$，$g_{22}=r^2$，$g_{33}=r^2\sin^2\theta$

不为零的克雷斯托菲符号出现在 $p=2$ 或 3 时，于是有

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix}=g^{1r}[22,r]=g^{11}[22,1]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial r}=-r$$

$$\begin{Bmatrix}2\\21\end{Bmatrix}=g^{2r}[21,r]=g^{22}[21,2]=\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)$$

$$=\frac{1}{r}=\begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}1\\33\end{Bmatrix}=g^{1r}[33,r]=g^{11}[33,1]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin^2\theta)=-r\sin^2\theta$$

$$\begin{Bmatrix}2\\33\end{Bmatrix}=g^{2r}[33,r]=g^{22}[33,2]=\frac{1}{g_{22}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}$$

$$=\frac{-1}{2r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}(r^2\sin^2\theta)=-\sin\theta\cos\theta$$

$$\begin{Bmatrix}3\\31\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}3\\13\end{Bmatrix}=g^{33}[13,3]=\frac{1}{2r^2\sin^2\theta}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}$$

$$=\frac{1}{2r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin^2\theta)=\frac{1}{r}$$

$$\begin{Bmatrix}3\\32\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}3\\23\end{Bmatrix}=g^{33}[32,3]=\frac{1}{2r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(r^2\sin^2\theta)$$

$$=\cot\theta$$

其余的均为零。

测地线

50. 试证 $I=\int_{t_1}^{t_2}F(t,x,\dot{x})\mathrm{d}t$ 有极值(极大值或极小值)的必要条件是$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)=0$。

证: 设曲线 $x=X(t)$，$t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 使得 I 有极值。经过 t_1 和 t_2 两点与 I 相邻的曲线是 $x=X(t)+\varepsilon\eta(t)$，$t$ 与 π 无关，$\eta(t_1)=\eta(t_2)=0$与 I 相邻的曲线的值是

$$I(\varepsilon)=\int_{t_1}^{t_2}F(t,X+\varepsilon\eta,\dot{X}+\varepsilon\dot{\eta})\mathrm{d}t$$

$\varepsilon=0$ 时有极值，而必要条件为 $\left.\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0$，由在积分号下的微分运算得

$$\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\eta+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}\right)\mathrm{d}t=0$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial F}{\partial x}\eta\mathrm{d}t+\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\eta\right|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\eta\left[\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\right]\mathrm{d}t=0$$

因为 η 是任意数，故有 $\dfrac{\partial F}{\partial x}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)=0$

这一结论很容易推广到积分 $\int_{t_1}^{t_2}F(t,x^1,\dot{x}^1,x^2,\dot{x}^2,\cdots,x^N,\dot{x}^N)\mathrm{d}t$，有极值的必要条件是

$$\frac{\partial F}{\partial x^k}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k}\right)=0$$

该式称为欧拉或拉格朗日方程(见例题 73)　(证毕)

51. 试证黎曼空间的测地线是 $\dfrac{\mathrm{d}^2x^r}{\mathrm{d}s^2}+\left\{\begin{matrix}r\\pq\end{matrix}\right\}\dfrac{\mathrm{d}x^p}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}s}=0$。

证： 利用具有 $F=\sqrt{g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q}$ 的欧拉方程(例题 50)求 $\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q}\mathrm{d}t$ 的极值。

$$\frac{\partial F}{\partial x^k}=\frac{1}{2}(g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q)^{-1/2}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\dot{x}^q$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k}=\frac{1}{2}(g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q)^{-1/2}\cdot 2g_{pk}\dot{x}^p$$

用 $\dot{s}=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\sqrt{g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q}$，欧拉方程可以写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{g_{pk}\dot{x}^p}{\dot{s}}\right)-\frac{1}{2\dot{s}}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\dot{x}^q=0$$

或

$$g_{pk}\ddot{x}^p+\frac{\partial g_{pk}}{\partial x^q}\dot{x}^p\dot{x}^q-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\dot{x}^q=\frac{g_{pk}\dot{x}^p\ddot{s}}{\dot{s}}$$

令$\dfrac{\partial g_{pk}}{\partial x^q}\dot{x}^p\dot{x}^q=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\partial g_{pk}}{\partial x^q}+\dfrac{\partial g_{qk}}{\partial x^p}\right\}\dot{x}^p\dot{x}^q$，于是上式成为

$$g_{pk}\ddot{x}^p+[pq,k]\dot{x}^p\dot{x}^q=\frac{g_{pk}\dot{x}^p\ddot{s}}{\dot{s}}$$

若我们用弧长作参数，$\dot{s}=1$，$\ddot{s}=0$，则方程成为

$$g_{pk}\frac{\mathrm{d}^2x^p}{\mathrm{d}s^2}+[pq,k]\frac{\mathrm{d}x^p}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}s}=0$$

用g^{rk}乘等式两边得：

$$\frac{\mathrm{d}^2x^r}{\mathrm{d}s^2}=\left\{\begin{matrix}r\\pq\end{matrix}\right\}\frac{\mathrm{d}x^p}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}s}=0 \qquad \text{（证毕）}$$

协变导数

52. 若A_p和A^p是张量，试证：(a) $A_{p,q}\equiv\dfrac{\partial A_p}{\partial x^q}-\left\{\begin{matrix}s\\pq\end{matrix}\right\}A_s$；(b) $A^p_{,q}\equiv\dfrac{\partial A^p}{\partial x^q}+\left\{\begin{matrix}p\\qs\end{matrix}\right\}A^s$是张量。

证： (a) 因为$\overline{A}_j=\dfrac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^j}A_r$

$$\frac{\partial\overline{A}_j}{\partial\overline{x}^k}=\frac{\partial x^r}{\partial\overline{x}^j}\frac{\partial A_r}{\partial x^t}\frac{\partial x^t}{\partial\overline{x}^k}+\frac{\partial^2x^r}{\partial\overline{x}^j\partial\overline{x}^k}A_r \quad (A52.1)$$

由例题47知

$$\frac{\partial^2x^r}{\partial\overline{x}^j\partial\overline{x}^k}=\overline{\left\{\begin{matrix}n\\jk\end{matrix}\right\}}\frac{\partial x^r}{\partial\overline{x}^n}-\frac{\partial x^i}{\partial\overline{x}^j}\frac{\partial x^l}{\partial\overline{x}^k}\left\{\begin{matrix}r\\il\end{matrix}\right\}$$

代入式(A52.1)

$$\frac{\partial\overline{A}_j}{\partial\overline{x}^k}=\frac{\partial x^r}{\partial\overline{x}^j}\frac{\partial A_r}{\partial x^t}\frac{\partial x^t}{\partial\overline{x}^k}+\overline{\left\{\begin{matrix}n\\jk\end{matrix}\right\}}\frac{\partial x^r}{\partial\overline{x}^n}-\frac{\partial x^i}{\partial\overline{x}^j}\frac{\partial x^l}{\partial\overline{x}^k}\left\{\begin{matrix}r\\il\end{matrix}\right\}$$

$$=\frac{\partial x^p}{\partial\overline{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial\overline{x}^k}\frac{\partial A_p}{\partial x^q}+\overline{\left\{\begin{matrix}n\\jk\end{matrix}\right\}}\overline{A}_n-\frac{\partial x^p}{\partial\overline{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial\overline{x}^k}\left\{\begin{matrix}s\\pq\end{matrix}\right\}A_s$$

或

$$\frac{\partial\overline{A}_j}{\partial\overline{x}^k}-\overline{\left\{\begin{matrix}n\\jk\end{matrix}\right\}}\overline{A}_n=\frac{\partial x^p}{\partial\overline{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial\overline{x}^k}\left(\frac{\partial A_p}{\partial x^q}-\left\{\begin{matrix}s\\pq\end{matrix}\right\}A_s\right)$$

于是证明了$\dfrac{\partial A_p}{\partial x^q}-\left\{\begin{matrix}s\\pq\end{matrix}\right\}A_s\equiv A_{p,q}$是二阶协变张量，

该式叫做 A_p 相对于 x^q 的协变导数。

(b) 因 $\bar{A}^j = \dfrac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^r} A^r$

$$\frac{\partial \bar{A}^j}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^r}\frac{\partial A^r}{\partial x^t}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^r \partial x^t}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}A^r \qquad (A52.2)$$

将 47 题中的 x 与 $\bar{x}$ 互换，有

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^r \partial x^t} = \begin{Bmatrix} n \\ rt \end{Bmatrix}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n} - \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^t}\overline{\begin{Bmatrix} j \\ il \end{Bmatrix}}$$

代入式(A52.2)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{A}^j}{\partial \bar{x}^k} &= \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^r}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial A^r}{\partial x^t} + \begin{Bmatrix} n \\ rt \end{Bmatrix}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}A^r \\
&\quad - \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^t}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}\overline{\begin{Bmatrix} j \\ il \end{Bmatrix}}A^r \\
&= \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^r}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial A^r}{\partial x^t} + \begin{Bmatrix} n \\ rt \end{Bmatrix}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}A^r - \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\delta^l_k\overline{\begin{Bmatrix} j \\ il \end{Bmatrix}}A^r \\
&= \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial A^p}{\partial x^q} + \begin{Bmatrix} p \\ sq \end{Bmatrix}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}A^s - \overline{\begin{Bmatrix} j \\ ik \end{Bmatrix}}\bar{A}^i
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{A}^j}{\partial \bar{x}^k} + \overline{\begin{Bmatrix} j \\ ik \end{Bmatrix}}\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\left(\frac{\partial A^p}{\partial x^q} + \begin{Bmatrix} p \\ sq \end{Bmatrix}A^s\right)$$

可见 A^p 相对于 x^q 的协变导数 $A^p_{,q} \equiv \left(\dfrac{\partial A^p}{\partial x^q} + \begin{Bmatrix} p \\ sq \end{Bmatrix}A^s\right)$ 是二阶混合张量。

53. 写出下列张量相对于 x^q 的协变导数：

解： (a) A_{jk}，(b) A^{jk}，(c) $A^j_{\cdot k}$，(d) $A^j_{\cdot kl}$，(e) $A^{jkl}_{\cdot\cdot\cdot mn}$

(a) $A_{jk,q} = \dfrac{\partial A_{jk}}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ jq \end{Bmatrix}A_{sk} - \begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix}A_{js}$

(b) $A^{jk}_{\cdot\cdot q} = \dfrac{\partial A^{jk}}{\partial x^q} + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}A^{sk} + \begin{Bmatrix} k \\ qs \end{Bmatrix}A^{js}$

(c) $A^j_{\cdot k,q} = \dfrac{\partial A^j_{\cdot k}}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix}A^j_{\cdot s} + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}A^s_{\cdot k}$

(d) $A^j_{\cdot kl,q} = \dfrac{\partial A^j_{\cdot kl}}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix}A^j_{\cdot sl} - \begin{Bmatrix} s \\ lq \end{Bmatrix}A^j_{\cdot ks} + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}A^s_{\cdot kl}$

(e) $A^{jkl}_{\cdot\cdot\cdot mn,q} = \dfrac{\partial A^{jkl}_{\cdot\cdot\cdot mn}}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ mq \end{Bmatrix} A^{jkl}_{\cdot\cdot\cdot sn} - \begin{Bmatrix} s \\ nq \end{Bmatrix} A^{jkl}_{\cdot\cdot\cdot ms}$

$+ \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix} A^{skl}_{\cdot\cdot\cdot mn} + \begin{Bmatrix} k \\ qs \end{Bmatrix} A^{jsl}_{\cdot\cdot\cdot mn} + \begin{Bmatrix} l \\ qs \end{Bmatrix} A^{jks}_{\cdot\cdot\cdot mn}$

54. 试证(a) g_{jk}，(b) g^{jk}，(c) δ^j_k 的协变导数为零。

证： (a) $g_{jk,q} = \dfrac{\partial g_{jk}}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ jq \end{Bmatrix} g_{sk} - \begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix} g_{js}$

$= \dfrac{\partial g_{jk}}{\partial x^q} - [jq,k] - [kq,j] = 0$ （见例题 45(a)）

(b) $g^{jk}_{,q} = \dfrac{\partial g^{jk}}{\partial x^q} + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix} g^{sk} + \begin{Bmatrix} k \\ qs \end{Bmatrix} g^{js} = 0$ （见例题 45(b)）

(c) $\delta^j_{k,q} = \dfrac{\partial \delta^j_k}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix} \delta^j_s + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix} \delta^s_k = 0 - \begin{Bmatrix} j \\ kq \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} j \\ qk \end{Bmatrix} = 0$

（证毕）

55. 试求 $A^j_{\cdot k} B^{lm}_{\cdot\cdot n}$ 相对于 x^q 的协变导数。

解： $(A^j_{\cdot k} B^{lm}_{\cdot\cdot n})_{,q} = \dfrac{\partial (A^j_{\cdot k} B^{lm}_{\cdot\cdot n})}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix} A^j_{\cdot s} B^{lm}_{\cdot\cdot n} + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix} A^s_{\cdot k} B^{lm}_{\cdot\cdot n}$

$- \begin{Bmatrix} s \\ nq \end{Bmatrix} A^j_{\cdot k} B^{lm}_{\cdot\cdot s} + \begin{Bmatrix} l \\ qs \end{Bmatrix} A^j_{\cdot k} B^{sm}_{\cdot\cdot n} + \begin{Bmatrix} m \\ qs \end{Bmatrix} A^j_{\cdot k} B^{ls}_{\cdot\cdot n}$

$= \left(\dfrac{\partial A^j_{\cdot k}}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix} A^j_{\cdot s} + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix} A^s_{\cdot k} \right) B^{lm}_{\cdot\cdot n}$

$+ \left(\dfrac{\partial B^{lm}}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ nq \end{Bmatrix} B^{lm}_{\cdot\cdot s} + \begin{Bmatrix} l \\ qs \end{Bmatrix} B^{sm}_{\cdot\cdot n} + \begin{Bmatrix} m \\ qs \end{Bmatrix} B^{ls}_{\cdot\cdot n} \right) A^j_{\cdot k}$

$= A^j_{\cdot k,q} B^{lm}_{\cdot\cdot n} + A^j_{\cdot k} B^{lm}_{\cdot\cdot n,q}$

56. 试证 $(g_{jk} A^{km}_{\cdot\cdot n})_{,q} = g_{jk} A^{km}_{\cdot\cdot n,q}$。

证： $(g_{jk} A^{km}_{\cdot\cdot n})_{,q} = g_{jk,q} A^{km}_{\cdot\cdot n} + g_{jk} A^{km}_{\cdot\cdot n,q} = g_{jk} A^{km}_{\cdot\cdot n,q}$

因为题 54(a)已证 $g_{jk,q}=0$，在计算协变导数时，g_{jk}，g^{jk}，δ^j_k 可作为常数处理。 （证毕）

张量形式的梯度、散度和旋度

57. 试证 $\operatorname{div} \boldsymbol{A}^p = \dfrac{1}{\sqrt{g}} \dfrac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} A^k)$。

证： A^p 的散度是 A^p 的协变导数的缩并，即 $A^p_{,q}$ 或 $A^p_{,p}$ 的缩

并，应用 45 题(c)得

$$\operatorname{div}A^p = A^p_{,p} = \frac{\partial A^k}{\partial x^k} + \begin{Bmatrix} p \\ pk \end{Bmatrix} A^k = \frac{\partial A^k}{\partial x^k} + \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \ln \sqrt{g} \right) A^k$$

$$= \frac{\partial A^k}{\partial x^k} + \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^k} \right) A^k$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{g} A^k \right)$$

（证毕）

58. 试证 $\nabla^2 \Phi = \dfrac{1}{\sqrt{g}} \dfrac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{g}\, g^{kr} \dfrac{\partial \phi}{\partial x^r} \right)$。

证： Φ 的梯度是 $\operatorname{grad}\Phi = \nabla \Phi = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^r}$，这是一个一阶协变张量，如同计算 Φ 的协变导数一样计算(参看题 6(b))，记作 $\Phi_{,r}$。与 $\Phi_{,r}$ 相伴的一阶逆变张量是 $A^k = g^{kr} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^r}$，由例题 57 有

$$\nabla^2 \Phi = \operatorname{div}\left(g^{kr} \frac{\partial \Phi}{\partial x^r} \right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{g}\, g^{kr} \frac{\partial \Phi}{\partial x^r} \right)$$

（证毕）

59. 试证 $A_{p,q} - A_{q,p} = \dfrac{\partial A_p}{\partial x^q} - \dfrac{\partial A^q}{\partial x^p}$。

证：

$$A_{p,q} - A_{q,p} = \left(\frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} A_s \right) - \left(\frac{\partial A_q}{\partial x^p} - \begin{Bmatrix} s \\ qp \end{Bmatrix} A_s \right)$$

$$= \frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \frac{\partial A^q}{\partial x^p}$$

这个二阶张量确定了 A_p 的旋度。（证毕）

60. 在(a)柱面坐标系和(b)球面坐标系中，试用矢量 A^p 的物理分量表示它的散度。

解： (a) 柱面坐标系中 $x^1 = \rho$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho^2, \quad \sqrt{g} = \rho \text{ (参看例题 30(a))}$$

物理分量记作 A_ρ, A_φ, A_z，算得如下

$$A_\rho = \sqrt{g_{11}} A^1 = A^1,\ A_\varphi = \sqrt{g_{22}} A^2 = \rho A^2,$$

$$A_z = \sqrt{g_{33}} A^3 = A^3$$

$$\mathrm{div} A^p = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g} A^k)$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(A_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho A_z)\right]$$

(b) 球面坐标系中 $x^1 = r$，$x^2 = \theta$，$x^3 = \varphi$，

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{vmatrix} = r^4\sin^2\theta, \text{ 或 } \sqrt{g} = r^2\sin\theta$$

（参看例题 30(b)）

物理分量记作 A_r、A_θ、A_ϕ，并且下列各式给出

$$A_r = \sqrt{g_{11}} A^1 = A^1,\ A_\theta = \sqrt{g_{22}} A^2 = rA^2,$$

$$A_\varphi = \sqrt{g_{33}} A^3 = r\sin\theta A^3$$

于是

$$\mathrm{div} A^p = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g} A^k)$$

$$= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta A_r) + \frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta A_\theta) + \frac{\partial}{\partial\phi}(rA_\phi)\right]$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

61. 在(a)柱面坐标系和(b)球面坐标系中，写出$\nabla^2\Phi$的表达式。

解： (a) 柱面坐标系中 $g^{11} = 1$，$g^{22} = 1/\rho^2$，$g^{33} = 1$（参看例题 35(a)）

由例题 58 得

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}\, g^{kr} \frac{\partial\Phi}{\partial x^r}\right)$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

(b) 在球面坐标系中 $g^{11}=1$，$g^{22}=1/r^2$，$g^{33}=1/r^2\sin^2\theta$（参看例题 35(b)）有

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}\,g^{kr}\frac{\partial\Phi}{\partial x^r}\right)$$

$$=\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$

内禀导数

62. 试计算下列张量的内禀导数，设 t 的函数是可微的，

(a) 不变量 Φ，(b) A^j，(c) $A^j_{\cdot k}$，(d) $A^{jk}_{\cdot\cdot lmn}$。

解：(a) $\dfrac{\delta\Phi}{\delta t}=\Phi_{,q}\dfrac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x^q}\dfrac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ 和通常一样地求导数

(b) $$\frac{\delta A^j}{\delta t}=A^j_{,q}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial A^j}{\partial x^q}+\begin{Bmatrix}j\\qs\end{Bmatrix}A^s\right)\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{\partial A^j}{\partial x^q}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}+\begin{Bmatrix}j\\qs\end{Bmatrix}A^s\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}A^j}{\mathrm{d}t}+\begin{Bmatrix}j\\qs\end{Bmatrix}A^s\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}$$

(c) $$\frac{\delta A^j_k}{\delta t}=A^j_{\cdot k,q}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial A^j_{\cdot k}}{\partial x^q}-\begin{Bmatrix}s\\kq\end{Bmatrix}A^j_{\cdot s}+\begin{Bmatrix}j\\qs\end{Bmatrix}A^s_{\cdot k}\right)\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{\mathrm{d}A^j_{\cdot k}}{\mathrm{d}t}-\begin{Bmatrix}s\\kq\end{Bmatrix}A^j_{\cdot s}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}+\begin{Bmatrix}j\\qs\end{Bmatrix}A^s_{\cdot k}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}$$

(d) $$\frac{\delta A^{jk}_{\cdot\cdot lmn}}{\delta t}=A^{jk}_{\cdot\cdot lmn,q}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial A^{jk}_{\cdot\cdot lmn}}{\partial x^q}-\begin{Bmatrix}s\\lq\end{Bmatrix}A^{jk}_{\cdot\cdot smn}-\begin{Bmatrix}s\\mq\end{Bmatrix}A^{jk}_{\cdot\cdot lsn}-\begin{Bmatrix}s\\nq\end{Bmatrix}A^{jk}_{\cdot\cdot lms}+\begin{Bmatrix}j\\qs\end{Bmatrix}A^{sk}_{\cdot\cdot lmn}+\begin{Bmatrix}k\\qs\end{Bmatrix}A^{js}_{\cdot\cdot lmn}\right)\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{\mathrm{d}A^{jk}_{\cdot\cdot lmn}}{\mathrm{d}t} - \begin{Bmatrix} s \\ lq \end{Bmatrix} A^{jk}_{\cdot\cdot smn} \frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t} - \begin{Bmatrix} s \\ mq \end{Bmatrix} A^{jk}_{\cdot\cdot lsn} \frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}$$

$$- \begin{Bmatrix} s \\ nq \end{Bmatrix} A^{jk}_{\cdot\cdot lms} \frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t} + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix} A^{sk}_{\cdot\cdot lmn} \frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}$$

$$+ \begin{Bmatrix} k \\ qs \end{Bmatrix} A^{js}_{\cdot\cdot lmn} \frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}$$

63. 试证 g_{jk}，g^{jk}和 δ^j_k 的内禀导数等于零。

证： $\frac{\delta g_{jk}}{\delta t} = (g_{jk,q})\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t} = 0$，　$\frac{\delta g^{jk}}{\delta t} = (g^{jk}_{,q})\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t} = 0$，

$\frac{\delta g^j_k}{\delta t} = \delta^j_{k,q}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t} = 0$　　（参看例题 54）　　（证毕）

相对张量

64. 若 $A^p_{\cdot q}$和 $B^{rs}_{\cdot\cdot t}$分别是权 ω_1 和 ω_2 的相对张量，试证它们的内积和外积是权 $\omega_1+\omega_2$ 的相对张量。

证： 根据假设

$$\overline{A}^j_{\cdot k} = J^{\omega_1} \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k} A^p_{\cdot q}, \quad \overline{B}^{lm}_{\cdot\cdot n} = J^{\omega_2} \frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^r} \frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^s} \frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^n} B^{rs}_{\cdot\cdot t}$$

外积

$$\overline{A}^j_{\cdot k}\overline{B}^{lm}_{\cdot\cdot n} = J^{\omega_1+\omega_2} \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k} \frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^r} \frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^s} \frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^n} A^p_{\cdot q} B^{rs}_{\cdot\cdot t}$$

可见它是权 $\omega_1+\omega_2$ 的相对张量。任何内积是外积的缩并，故也是权 $\omega_1+\omega_2$ 的相对张量。　　（证毕）

65. 试证 $\sqrt{g}$ 是权为 1 的相对张量，即张量密度。

证： 由行列式的元素 g_{pq}给定的行列式 g 的变换符合

$$\overline{g}_{jk} = \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k} g_{pq}$$

等式两边取其行列式，则

$$\overline{g} = \left|\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j}\right| \left|\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k}\right| g = J^2 g$$

或$\sqrt{\overline{g}} = J\sqrt{g}$，这表明 $\sqrt{g}$ 是权为 1 的相对张量。

（证毕）

66. 试证 $dV=\sqrt{g}\,dx^1dx^2\cdots dx^N$ 是不变量。

证： 根据例题 65，

$$d\overline{V}=\sqrt{\overline{g}}\,d\overline{x}^1d\overline{x}^2\cdots d\overline{x}^N=\sqrt{g}\,J\,d\overline{x}^1d\overline{x}^2\cdots d\overline{x}^N$$
$$=\sqrt{g}\left|\frac{\partial x}{\partial\overline{x}}\right|d\overline{x}^1d\overline{x}^2\cdots d\overline{x}^N=\sqrt{g}\,dx^1dx^2\cdots dx^N$$
$$=dV$$

由此，若 Φ 是不变量，则

$$\int\underset{\overline{V}}{\cdots}\int\overline{\Phi}d\overline{V}=\int\underset{V}{\cdots}\int\Phi dV$$

对于任何坐标系，N 维空间的体积均可依此积分。沿曲面积分也可与此类推。（证毕）

综合应用

67. 将(a)质点的速度和(b)质点的加速度表为张量形式。

解： (a) 若质点沿曲线 $x^k=x^k(t)$ 运动，式中 t 是时间(参变量)，则 $v^k=\dfrac{dx^k}{dt}$ 是质点的速度，而且是一阶逆变张量(参看例题 9)。

(b) $\dfrac{dv^k}{dt}=\dfrac{d^2x^k}{dt^2}$ 一般不是张量，在一切坐标系中不能写出其物理量，我们定义加速度 a^k 作为速度的内禀导数，即 $a^k=\dfrac{\delta v^k}{\delta t}$ 是一阶逆变张量。

68. 将牛顿定律写成张量形式。

解： 设质点的质量 M 是与时间 t 无关的不变量。则 $Ma^k=F^k$ 是一阶逆变张量，并称之为作用在质点上的力。牛顿定律可以写为

$$F^k=Ma^k=M\frac{\delta v^k}{\delta t}$$

69. 试证 $a^k=\dfrac{\delta v^k}{\delta t}=\dfrac{d^2x^k}{dt^2}+\left\{\begin{matrix}k\\pq\end{matrix}\right\}\dfrac{dx^p}{dt}\dfrac{dx^q}{dt}$

证： 因为 v^k 是逆变张量，由题 62(b)我们有

$$\frac{\delta v^k}{\delta t}=\frac{\mathrm{d}v^k}{\mathrm{d}t}+\begin{Bmatrix}k\\qs\end{Bmatrix}v^s\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x^k}{\mathrm{d}t^2}+\begin{Bmatrix}k\\qp\end{Bmatrix}v^p\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{\mathrm{d}^2x^k}{\mathrm{d}t^2}+\begin{Bmatrix}k\\qp\end{Bmatrix}\frac{\mathrm{d}x^p}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}$$ （证毕）

70. 试求柱面坐标系中(a)质点的速度和(b)质点的加速度的物理分量。

解： (a) 根据例题 67(a)，速度的逆变分量是

$$\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t},\ \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t},\ \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

所以速度的物理分量是

$$\sqrt{g_{11}}\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t},\ \sqrt{g_{22}}\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}=\rho\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t},\ \sqrt{g_{33}}\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

上式中用了 $g_{11}=1$，$g_{22}=\rho^2$，$g_{33}=1$

(b) 由例题 69 和例题 49(b)，加速度的逆变分量是

$$a^1=\frac{\mathrm{d}^2x^1}{\mathrm{d}t^2}+\begin{Bmatrix}1\\22\end{Bmatrix}\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}t^2}-\rho\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

$$a^2=\frac{\mathrm{d}^2x^2}{\mathrm{d}t^2}+\begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}+\begin{Bmatrix}2\\21\end{Bmatrix}\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

$$a^3=\frac{\mathrm{d}^2x^3}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$$

加速度的物理分量是

$$\sqrt{g_{11}}a^1=\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2,\quad \sqrt{g_{22}}a^2=\rho\ddot{\varphi}+2\dot{\rho}\dot{\varphi},$$

$$\sqrt{g_{33}}a^3=\ddot{z}$$

式中的圆点表示分别对时间求导数。

71. 若质量 M 不变的质点以速度 v 运动，其动能 $T=\frac{1}{2}Mv^2=\frac{1}{2}Mg_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q$，试证

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}\right)-\frac{\partial T}{\partial x^k}=Ma_k$$

式中 a_k 表示加速度的协变分量。

证：因为 $T=\frac{1}{2}Mg_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q$，则有

$$\frac{\partial T}{\partial x^k}=\frac{1}{2}M\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\dot{x}^q,\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}=Mg_{kq}\dot{x}^q$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}\right)=M\left(g_{kq}\ddot{x}^q+\frac{\partial g_{kq}}{\partial x^j}\dot{x}^j\dot{x}^q\right)$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}\right)-\frac{\partial T}{\partial x^k}&=M\left(g_{kq}\ddot{x}^q+\frac{\partial g_{kq}}{\partial x^j}\dot{x}^j\dot{x}^q-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\dot{x}^q\right)\\&=M\left(g_{kq}\ddot{x}^q+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kq}}{\partial x^p}+\frac{\partial g_{kp}}{\partial x^q}-\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\right)\dot{x}^p\dot{x}^q\right)\\&=M(g_{kq}\ddot{x}^q+[pq,k]\dot{x}^p\dot{x}^q)\\&=Mg_{kr}\left(\ddot{x}^r+\left\{\begin{matrix}r\\pq\end{matrix}\right\}\dot{x}^p\dot{x}^q\right)=Mg_{kr}a^r=Ma_k\end{aligned}$$

（证毕）

以上证明过程中用了例题 69 的结论。这个结果可以用在不同的坐标系中表示加速度。

72. 用题 70 的结果，求在柱面坐标系中加速度的物理分量。

解：因为 $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\rho^2+\rho^2\mathrm{d}\varphi^2+\mathrm{d}z^2$，$v^2=\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2=\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2$

$$T=\frac{1}{2}Mv^2=\frac{1}{2}M(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)$$

由于 $x^1=\rho$，$x^2=\varphi$，$x^3=z$，从例题 70 可得

$$a_1=\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2,\quad a_2=\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho^2\dot{\varphi})^2,\quad a_3=\ddot{z}$$

于是物理分量为

$$\frac{a_1}{\sqrt{g_{11}}},\ \frac{a_2}{\sqrt{g_{22}}},\ \frac{a_3}{\sqrt{g_{33}}}\quad 或\quad \ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2,\ \frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho^2\dot{\varphi}),\ \ddot{z}$$

因为 $g_{11}=1$，$g_{22}=\rho^2$，$g_{33}=1$，并与例题 70 作比较。

73. 若作用于质点上的协变力为 $F_k=-\dfrac{\partial V}{\partial x^k}$，式中 $V(x^1,\cdots,x^N)$ 是势能，试证 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial x^k}=0$，其中 $L=T-V$。

证： 从 $L=T-V$ 可知 $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}=\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}$，因为 V 与 $\dot{x}^k$ 无关，由例题 71 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}\right)-\frac{\partial T}{\partial x^k}=Ma_k=F_k=-\frac{\partial V}{\partial x^k}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}\right)-\frac{\partial}{\partial x^k}(T-V)=0,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^k}=0$$

L 称为拉格朗日函数，包含 L 的方程叫做拉格朗日方程，这是力学中的重要方程。由例题 50 可知，这一题的结论与质点沿 $\int_{t_1}^{t_2}L\mathrm{d}t$ 的路途运动是有极值的说法是等价的。后者称为哈密顿原理。 （证毕）

74. 用张量形式表示散度定理。

解： 设 A^k 确定一个一阶张量场，又设 v_k 表示以体积 V 为边界，封闭表面 S 上的任一点朝外的单位法线，于是散度定理为

$$\iiint\limits_V A^k_{,k}\mathrm{d}V=\iint\limits_S A^k v_k\mathrm{d}S$$

对 N 维空间，则要用 N 重积分代替三重积分，用 $N-1$ 重积分代替二重积分。不变量 $A^k_{,k}$是 A^k 的散度（参看例题 57），不变量 $A^k v_k$ 是 A^k 和 v_k 的标积。

我们已经将散度定理表示为张量形式，因此对所有的坐标系都是正确的（也可参看例题 66）。

75. 将马克斯威尔方程(a) $\mathrm{div}\boldsymbol{B}=0$，(b) $\mathrm{div}\boldsymbol{D}=4\pi\rho$，(c) $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{1}{C}\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$，(d) $\nabla\times\boldsymbol{H}=\dfrac{4\pi\boldsymbol{I}}{c}$表为张量形式。

解 定义张量 B^k，D^k，E_k，H_k，I^k，并设 ρ 和 c 为不变量，于

是方程可写成

(a) $B^{k}_{,k}=0$

(b) $D^{k}_{,k}=4\pi\rho$

(c) $-\in^{jkq}E_{k,q}=-\frac{1}{C}\frac{\partial B^{j}}{\partial t}$ 或 $\in^{jkq}E_{k,q}=\frac{1}{C}\frac{\partial B^{j}}{\partial t}$

(d) $-\in^{jkq}H_{k,q}=\frac{4\pi I^{j}}{C}$ 或 $\in^{jkq}H_{k,q}=-\frac{4\pi I^{j}}{C}$

这些方程是电磁理论的基础。

附录B　正规正交化

对于 m 个矢量 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m$，当 $\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{p}_j=\delta_{ij}$成立时，称此 m 个矢量组成正规正交系。

给出一组线性无关的矢量，由它们作正规正交系的方法叫做正交归一化，又称施密特(Schmidt)正交化法。

引理：$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m$ 组成正规正交系时，它们是线性无关的。

证：令 $c_1\boldsymbol{p}_1+c_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{p}_m=\boldsymbol{0}$，作 $\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{p}_1$ 的内积，则

$$
\begin{aligned}
0=\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{p}_1&=c_1(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_1)+c_2(\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{p}_1)+\cdots+c_m(\boldsymbol{p}_m\cdot\boldsymbol{p}_1)\\
&=c_1
\end{aligned}
$$

同理可证 $c_i=0$，所以 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m$ 是线性无关的。

（证毕）

给定一组线性无关的矢量，研究如何用它们作正规正交系。

设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性无关，且 $\boldsymbol{x}_i\neq\boldsymbol{0}$。

首先，设 $\boldsymbol{x}_1/|\boldsymbol{x}_1|=\boldsymbol{p}_1$ 时，则 $\boldsymbol{p}_1$ 的大小是1。

其次，从 $\boldsymbol{p}_1$ 与 $\boldsymbol{x}_2$ 的线性组合中选出与 $\boldsymbol{p}_1$ 正交的矢量。就几何意义来说，在 $\boldsymbol{x}_1$ 与 $\boldsymbol{x}_2$ 决定的平面中能找到与 $\boldsymbol{p}_1$ 正交的矢量。

设　$\boldsymbol{g}_2=c_1\boldsymbol{p}_1+c_2\boldsymbol{x}_2$　（如图 B-1 所示）

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{g}_2\cdot\boldsymbol{p}_1&=(c_1\boldsymbol{p}_1+c_2\boldsymbol{x}_2)\cdot\boldsymbol{p}_1\\
&=c_1+c_2(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{p}_1)=0
\end{aligned}
$$

所以

$$c_1=-c_2\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{p}_1$$

从而得

$$\boldsymbol{g}_2=c_2[\boldsymbol{x}_2-(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_1]$$

由于 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 线性无关，所以

$$\boldsymbol{x}_2-(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_1\neq\boldsymbol{0}$$

因此，取 $c_2=1$，令

$$\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{g}_2/|\boldsymbol{g}_2|=[\boldsymbol{x}_2-(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_1]/|\boldsymbol{x}_2-(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_1|$$

即可。其次考虑 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ 与 $\boldsymbol{x}_3$ 的线性组合

$$\boldsymbol{g}_3=d_1\boldsymbol{p}_1+d_2\boldsymbol{p}_2+d_3\boldsymbol{p}_3$$

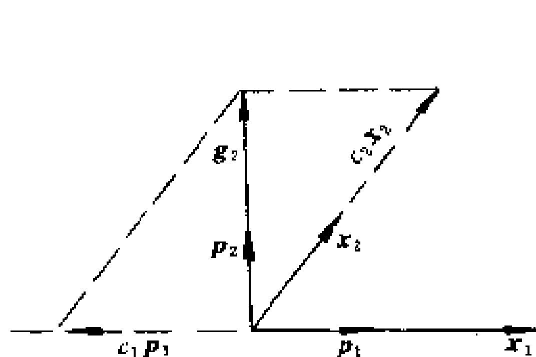


图 B-1

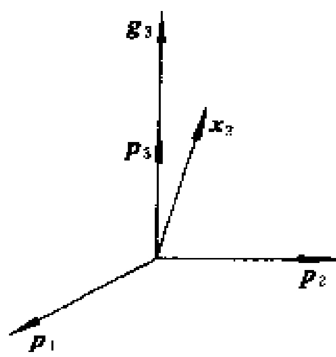


图 B-2

因为 $\boldsymbol{g}_3\cdot\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{g}_3\cdot\boldsymbol{p}_2=0$（如图 B-2 所示）

所以 $d_1+d_3\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{p}_1=0,\quad d_2+d_3\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{p}_2=0$

从而有 $\boldsymbol{g}_3=d_3[\boldsymbol{x}_3-(\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_1-(\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{p}_2]$

因为 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{x}_3$ 不能表为 $\boldsymbol{p}_1$ 与 $\boldsymbol{p}_2$ 的线性组合，因此

$$\boldsymbol{x}_3-(\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_1-(\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{p}_2\neq\boldsymbol{0}$$

故取 $d_3=1$，令 $\boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{g}_3/|\boldsymbol{g}_3|$ 即可。以下依此推演，令

$$\boldsymbol{p}_j=\left[\boldsymbol{x}_j-\sum_{i=1}^{j-1}(\boldsymbol{x}_j\cdot\boldsymbol{p}_i)\boldsymbol{p}_i\right]\Big/\left|\boldsymbol{x}_j-\sum_{i=1}^{j-1}(\boldsymbol{x}_j\cdot\boldsymbol{p}_i)\boldsymbol{p}_i\right|\quad(2\leqslant j\leqslant m)\tag{3.39}$$

于是 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m$ 组成正规正交系。上述组成正规正交系的方法称为施密特正交化法。

由上述作法可知，$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m$ 分别是 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 的线性组合。反之，由于

$$\boldsymbol{x}_1=|\boldsymbol{x}_1|/\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{x}_2=(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_1+|\boldsymbol{x}_2-(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_1|\boldsymbol{p}_2,\cdots$$

于是，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 又分别是 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m$ 的线性组合。

例 用矢量

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

作正规正交系时，则有

$$|\boldsymbol{x}_1|=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2},\quad \boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_2-(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{x}_2-(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_1|=\sqrt{1+(-1/2)^2+(1/2)^2}=\sqrt{3}/\sqrt{2}$$

$$\boldsymbol{p}_2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_3-(\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_1-(\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$-\frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix}\sqrt{6}/3\\-\sqrt{6}/6\\\sqrt{6}/6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{x}_3-(\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_1-(\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{p}_2|=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2}$$
$$=2/\sqrt{3}$$

$$\boldsymbol{p}_3=\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}2/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

附录 C　曲线坐标系

§1　正交曲线坐标系

设空间任一点 P 的直角坐标 x_1、x_2、x_3 可表为 u_1、u_2、u_3 的函数，即

$$x = x(u_1, u_2, u_3),\ y = y(u_1, u_2, u_3),\ z = z(u_1, u_2, u_3) \quad (1)$$

并假定由式(4.1)能解出 u_1、u_2、u_3，即

$$u_1 = u_1(x, y, z),\ u_2 = u_2(x, y, z),\ u_3 = u_3(x, y, z) \quad (2)$$

假设式(1)、式(2)都是连续可导的单值函数，而且是唯一的。对于特殊坐标系中的某些点不作上述假设要求。

给定点 P 的直角坐标 x、y、z，由式(2)能解出唯一的一组相应的坐标 u_1、u_2、u_3，我们称 u_1、u_2、u_3 为点 P 的曲线坐标。

曲面 $u_1=c_1$，$u_2=c_2$，$u_3=c_3$（式中 c_1、c_2、c_3 为常量）称为坐标曲面。每双坐标曲面的交线称为坐标曲线或坐标线（图 C-1）。如果坐标面的交角是直角，则称此曲线坐标系是正交的。曲线坐标系中的坐标曲线 u_1、u_2、u_3 与直角坐标系中的坐标轴 x、y、z 相类似。

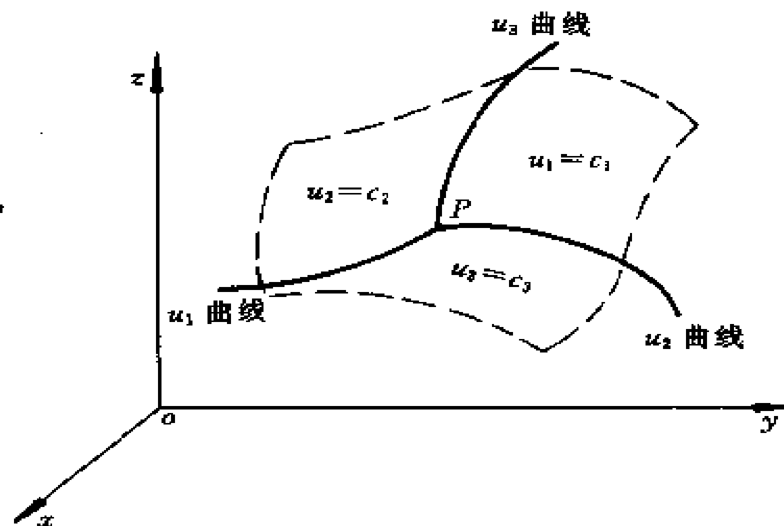


图　C-1

§2 单位矢量、弧元与体积元

1. 单位矢量

设点 P 的位置矢量为 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，则式(1)可写成

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u_1,u_2,u_3)$$

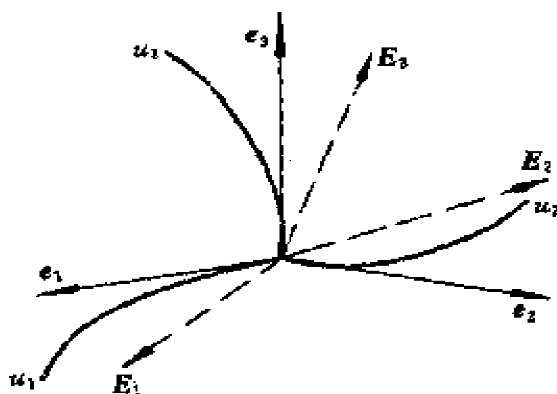


图 C-2

曲线 u_1 在点 P 的切矢量为 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}$（此时 u_2,u_3 为常量）。于是沿此方向的单位切矢量

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\Big/\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\right| \quad \text{即} \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}=h_1\boldsymbol{e}_1$$

式中 $h_1=\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\right|$

同样地，如果 $\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 分别是曲线 u_2、u_3 在 P 点的单位切矢量，则 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}=h_2\boldsymbol{e}_2$，$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}=h_3\boldsymbol{e}_3$，式中 $h_2=\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\right|$，$h_3=\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}\right|$。$h_1,h_2,h_3$ 称为纯量因子。单位矢量 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 分别沿曲线 u_1、u_2、u_3 增加的方向。

因为 ∇u_1 是曲面 $u_1=c_1$ 在 P 点法线方向的矢量，这个方向的单位矢量 $\boldsymbol{E}_1=\nabla u_1/|\nabla u_1|$。同样地，曲面 $u_2=c_2$，$u_3=c_3$ 在 P 点法线方向的单位矢量分别为 $\boldsymbol{E}_2=\nabla u_2/|\nabla u_2|$，$\boldsymbol{E}_3=\nabla u_3/|\nabla u_3|$。

2. 弧元与体积元

由 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u_1,u_2,u_3)$ 有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\mathrm{d}u_2+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}\mathrm{d}u_3=h_1\mathrm{d}u_1\boldsymbol{e}_1+h_2\mathrm{d}u_2\boldsymbol{e}_2+h_3\mathrm{d}u_3\boldsymbol{e}_3$$

于是，弧元的微分 $\mathrm{d}s$ 由 $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 确定。对于正交系，由于 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_1=0$，所以

$$\mathrm{d}s^2=h_1^2\mathrm{d}u_1^2+h_2^2\mathrm{d}u_2^2+h_3^2\mathrm{d}u_3^2 \tag{3}$$

对于一般的(不一定是正交的)曲线坐标系，弧元的平方为

$$\mathrm{d}s^2=\sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}g_{pq}\mathrm{d}u_p\mathrm{d}u_q \tag{4}$$

证明如下：

因为 $\mathrm{d}r=\frac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1+\frac{\partial \boldsymbol{r}_2}{\partial u_2}\mathrm{d}u_2+\frac{\partial \boldsymbol{r}_3}{\partial u_3}\mathrm{d}u_3=\boldsymbol{\beta}_1\mathrm{d}u_1+\boldsymbol{\beta}_2\mathrm{d}u_2+\boldsymbol{\beta}_3\mathrm{d}u_3$

于是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}&=\boldsymbol{\beta}_1\cdot\boldsymbol{\beta}_1\mathrm{d}\,u_1^{\,2}+\boldsymbol{\beta}_1\cdot\boldsymbol{\beta}_2\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2+\boldsymbol{\beta}_1\cdot\boldsymbol{\beta}_3\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_3\\&+\boldsymbol{\beta}_2\cdot\boldsymbol{\beta}_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_1+\boldsymbol{\beta}_2\cdot\boldsymbol{\beta}_2\mathrm{d}\,u_2^{\,2}+\boldsymbol{\beta}_2\cdot\boldsymbol{\beta}_3\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3\\&+\boldsymbol{\beta}_3\cdot\boldsymbol{\beta}_1\mathrm{d}u_3\mathrm{d}u_1+\boldsymbol{\beta}_3\cdot\boldsymbol{\beta}_2\mathrm{d}u_3\mathrm{d}u_2+\boldsymbol{\beta}_3\cdot\boldsymbol{\beta}_3\mathrm{d}\,u_3^{\,2}\\&=\sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}g_{pq}\mathrm{d}u_p\mathrm{d}u_q\end{aligned}$$

式中 $g_{pq}=\boldsymbol{e}_p\cdot\boldsymbol{e}_q$

系数矩阵 g_{pq} 是对称矩阵，如果坐标系是正交的，则 $p\neq q$ 时 $g_{pq}=0$，于是便得式(3)。

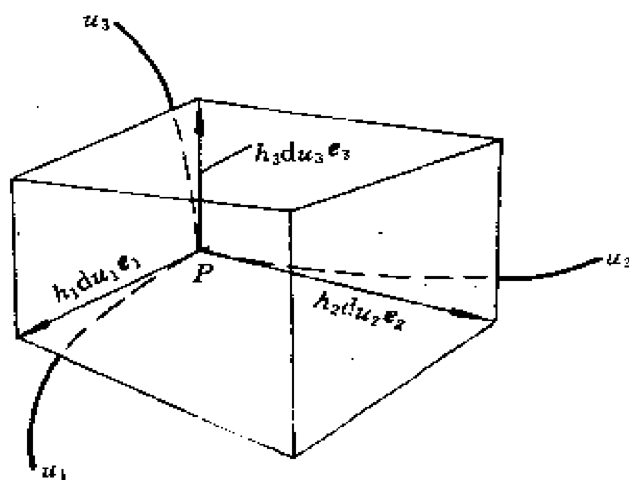


图 C-3

由图 C-3 可以看出，沿着曲线 u_1（此时令 u_2、u_3 为常量），即 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=h_1\mathrm{d}u_1\boldsymbol{e}_1$，则沿着 u_1 在 P 点的弧长的微分 $\mathrm{d}s_1$ 是 $h_1\mathrm{d}u_1$。同样地，沿着 u_2、u_3 在 P 点的弧长的微分分别是 $\mathrm{d}s_2=h_2\mathrm{d}u_2$，$\mathrm{d}s_3=h_3\mathrm{d}u_3$。

由图 C-3 还可得正交曲线坐标系中的体积元为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V&=|(h_1\mathrm{d}u_1\boldsymbol{e}_1)\cdot(h_2\mathrm{d}u_2\boldsymbol{e}_2)\times(h_3\mathrm{d}u_3\boldsymbol{e}_3)|\\&=h_1h_2h_3\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3\end{aligned}\tag{5}$$

这是因为正交的单位矢量 $|\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3|=1$。

§3 梯度、散度与旋度

梯度、散度与旋度都可表为曲线坐标的函数。设 Φ 是一纯量函数，$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$ 是正交曲线坐标 u_1、u_2、u_3 的矢函数，则下列结论是有效的。

$$\nabla \Phi = \mathrm{grad}\Phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial \Phi}{\partial u_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial \Phi}{\partial u_3}\boldsymbol{e}_3 \tag{6}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{a} = \mathrm{div}\boldsymbol{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 a_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_3 h_1 a_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2 a_3)\right\} \tag{7}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{a} = \mathrm{curl}\boldsymbol{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\boldsymbol{e}_1 & h_2\boldsymbol{e}_2 & h_3\boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 a_1 & h_2 a_2 & h_3 a_3 \end{vmatrix} \tag{8}$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial \Phi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial \Phi}{\partial u_3}\right)\right] \tag{9}$$

如果 $h_1=h_2=h_3=1$，且用 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 代替 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$，则上述结论就是第二章里所得的有关梯度、散度、旋度的公式，上述公式中的坐标 u_1、u_2、u_3，就是第二章里的坐标 x，y，z。

上述公式已在第五章证明过。

§4 常用的几种正交曲线坐标系

1. 柱面坐标系(ρ,φ,z)（图 C-4）

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z$$

式中 $\rho \geqslant 0$，$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$，$-\infty < z < \infty$

$$h_\rho = 1,\ h_\varphi = \rho,\ h_z = 1$$

2. 球面坐标系$[r,\theta,\varphi)$（图 C-5）

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

式中 $r \geqslant 0$，$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

$$h_r = 1,\ h_\theta = r,\ h_\varphi = r\sin\theta$$

3. 椭球坐标系(λ,μ,ν)

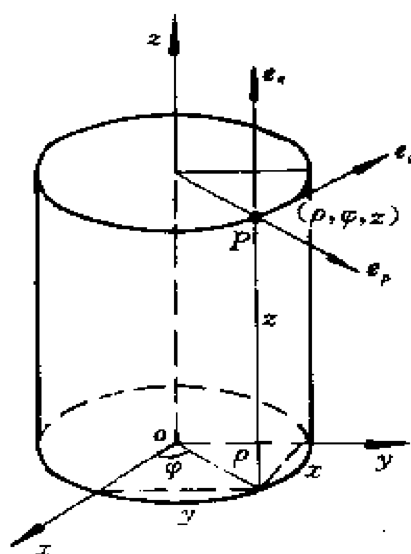


图 C-4

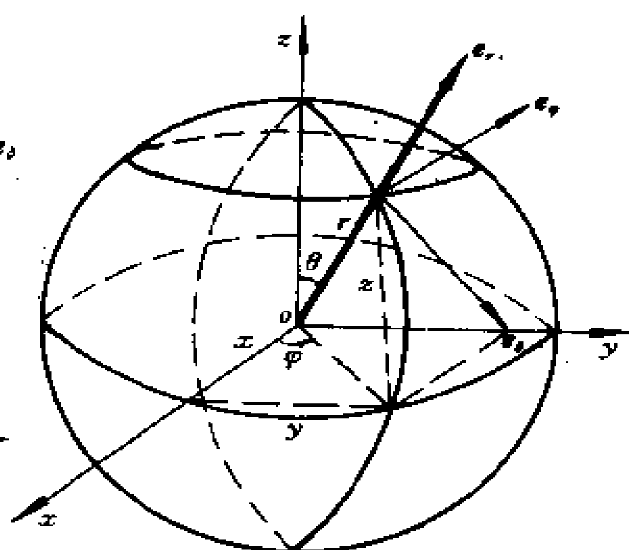


图 C-5

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1 \qquad \lambda<c^2<b^2<a^2$$

$$\frac{x^2}{a^2-\mu}+\frac{y^2}{b^2-\mu}+\frac{z^2}{c^2-\mu}=1 \qquad c^2<\mu<b^2<a^2$$

$$\frac{x^2}{a^2-\nu}+\frac{y^2}{b^2-\nu}+\frac{z^2}{c^2-\nu}=1 \qquad c^2<b^2<\nu<a^2$$

$$h_\lambda=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)}}$$

$$h_\mu=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}{(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)}}$$

$$h_\nu=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}{(a^2-\nu)(b^2-\nu)(c^2-\nu)}}$$

4. 椭圆柱坐标系(u,v,z)(图 C-6)

$$x=a\cosh u\cos v$$

$$y=a\sinh u\sin v$$

$$z=z$$

式中 $u\geqslant0$，$0\leqslant v\leqslant2\pi$、$-\infty<z<\infty$

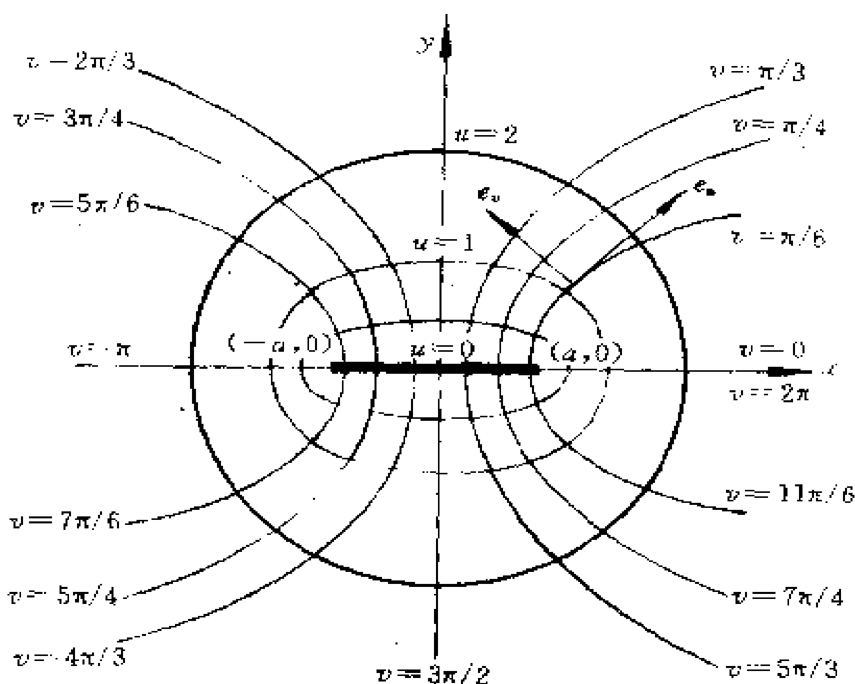


图　C-6

$$h_u = h_v = \sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v},$$

$$h_z = 1$$

坐标面在 xy 平面内的迹线如图 C-6 所示，这些迹线是共焦椭圆与双曲线。

例 1　试证柱面坐标系是正交的。

证：　柱面坐标系中任一点的位矢为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=\rho\cos\varphi\boldsymbol{i}+\rho\sin\varphi\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

ρ,φ 与 z 曲线的切矢量分别为 $\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\rho}$, $\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\varphi}$, $\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial z}$。

式中　$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\rho}=\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j}$,　$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\varphi}=-\rho\sin\varphi\boldsymbol{i}+\rho\cos\varphi\boldsymbol{j}$,　$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial z}=\boldsymbol{k}$

沿这些方向的单位矢量为

$$\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_\rho=\frac{\partial\boldsymbol{r}/\partial\rho}{|\partial\boldsymbol{r}/\partial\rho|}=\frac{\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j}}{\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}}=\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j}$$

$$e_2 = e_\varphi = \frac{\partial \boldsymbol{r}/\partial\varphi}{|\partial \boldsymbol{r}/\partial\varphi|} = \frac{-\rho\sin\varphi\boldsymbol{i} + \rho\cos\varphi\boldsymbol{j}}{\sqrt{\rho^2\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi}} = -\sin\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j}$$

$$e_3 = e_z = \frac{\partial \boldsymbol{r}/\partial z}{|\partial \boldsymbol{r}/\partial z|} = \boldsymbol{k}$$

于是

$$e_1 \cdot e_2 = (\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\varphi\boldsymbol{j}) \cdot (-\sin\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j}) = 0$$

$$e_1 \cdot e_3 = (\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\varphi\boldsymbol{j}) \cdot \boldsymbol{k} = 0$$

$$e_2 \cdot e_3 = (-\sin\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j}) \cdot \boldsymbol{k} = 0$$

可见坐标系是正交的。

习　　题

C.1　试用柱面坐标系表示矢量 $\boldsymbol{a}=z\boldsymbol{i}-2x\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k}$。

C.2　试用球面坐标系表示矢量 $\boldsymbol{a}=2y\boldsymbol{i}-z\boldsymbol{j}+3x\boldsymbol{k}$。

C.3　试证 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\rho=\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\varphi=-\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\rho$，式中字母上面的圆点表示对时间的导数。

C.4　试证 $\dot{\boldsymbol{e}}_r=\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\sin\theta\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$，$\dot{\boldsymbol{e}}_\theta=-\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r+\cos\theta\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$，$\dot{\boldsymbol{e}}_\varphi=-\sin\theta\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_r-\cos\theta\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\theta$。

C.5　试求柱面坐标系中的弧元平方，并确定相应的纯量因子。

C.6　试求椭圆柱坐标系中的弧元平方，并确定相应的纯量因子。

C.7　试用球面坐标系解题 5。

C.8　试证曲线坐标系正交的必要与充分条件是：当 $p\neq q$ 时，$g_{pq}=0$。

C.9　试求柱面坐标系与球面坐标系中的体积元。

C.10　试求椭圆柱坐标系中的体积元。

C.11　设 u_1、u_2、u_3 是正交曲线坐标，试证 x、y、z 相对于 u_1、u_2、u_3 的雅可毕为 $h_1h_2h_3$。

C.12　试求柱面坐标系与球面坐标系中的雅可毕。

C.13　设 u_1、u_2、u_3 为广义坐标，试证 $\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u_1}$、$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u_2}$、$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u_3}$ 与 ∇u_1、∇u_2、∇u_3 为互逆系。

C.14　试求柱面坐标系与球面坐标系中的 $\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u_1}$、$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u_2}$、$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u_3}$ 及 ∇u_1、∇u_2、∇u_3。并证明这些系中 $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{E}_2$、$\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{E}_3$。

C.15　试证$\left\{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}\right\}\{\nabla u_1\cdot\nabla u_2\times\nabla u_3\}=1$。

C.16　设有$x^2-y^2=2u_1\cos u_2$，$xy=u_1\sin u_2$，$z=u_3$。(i)证明该系为正交系，(ii)求雅可毕。

C.17　推导正交曲线坐标系中$\nabla\Phi$的表示式。

C.18　推导球面坐标系中$\nabla\Psi$与$\nabla\cdot\boldsymbol{a}$的表示式。

C.19　设u_1、u_2、u_3为正交坐标系，(i)证明$|\nabla u_p|=h_p^{-1}$，$p=1,2,3$；(ii)证明$\boldsymbol{e}_p=\boldsymbol{E}_p$。

C.20　给定下列坐标变换$u_1=xy$，$2u_2=x^2+y^2$，$u_3=z$。(i)证明坐标系是正交的；(ii)求雅可毕；(iii)求ds^2。

C.21　设u_1、u_2、u_3是正交坐标系，试证$\boldsymbol{e}_1=h_2h_3\nabla u_2\times\nabla u_3$，以及$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$与此相应的表示式。

C.22　试求半径为a的球面上的弧元。

C.23　试证正交坐标系中

$$\nabla\times(a_1\boldsymbol{e}_1)=\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_3h_1}\frac{\partial}{\partial u_3}(a_1h_1)-\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(a_1h_1)$$

C.24　试证正交坐标系中

$$\nabla\cdot(a_1\boldsymbol{e}_1)=\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}(a_1h_2h_3)$$

C.25　推导正交坐标系中$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=\nabla\times\boldsymbol{a}$的表示式。

C.26　推导正交坐标系中$\mathrm{div}\boldsymbol{a}=\nabla\cdot\boldsymbol{a}$的表示式。

C.27　推导正交坐标系中$\nabla^2\Psi$的表示式。

C.28　试写出椭圆柱坐标系中的方程$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\Phi$。

C.29　推导柱面坐标系中$\nabla\times\boldsymbol{a}$与$\nabla^2\Phi$的表示式。

C.30　推导柱面坐标系中$\nabla\Phi$与$\nabla\cdot\boldsymbol{a}$的表示式。

C.31　推导球面坐标系中$\nabla^2\Psi$的表示式。

C.32　推导球面坐标系中$\nabla\times\boldsymbol{a}$的表示式。

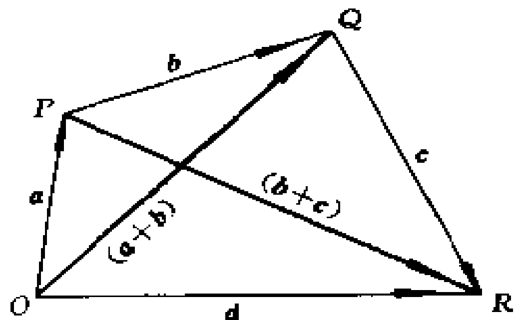
张量分析及演算习题全解

第一章　矢量代数

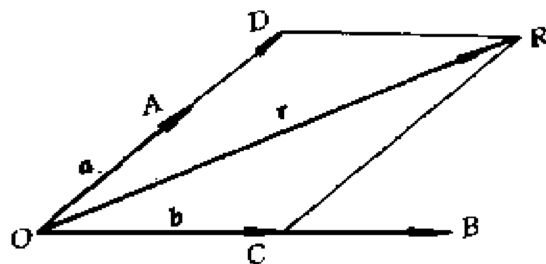
1.1　试证矢量加法符合结合律，即 $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$。

证：
$$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$
$$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$$
$$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}=\boldsymbol{d}\quad \text{即}\ \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{d}$$
$$\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{OR}=\boldsymbol{d}\quad \text{即}\ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}$$

所以
$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$$



题 1.1 图



题 1.3 图

1.2　已知矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，证明：(i) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，(ii) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$。

1.3　已知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 共面但不共线的两个矢量，在 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 所决定的平面内，写出任一矢量 $\boldsymbol{r}$ 的表达式。

解：共面不共线的两矢量，即不平行于同一矢量的两矢量必有一交点。设在此平面内的任一矢量 $\boldsymbol{r}$ 的始端与其交点 O 相交（见题 1.3 图），从 $\boldsymbol{r}$ 的末端 R 分别作 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的平行线与 b、a（或其延长

线）交 C、D 两点，于是构成平行四边形 $OCRD$，OR 是平行四边形的对角线。由图可知

$$\overrightarrow{OD}=x(\overrightarrow{OA})=x\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{OC}=y(\overrightarrow{OB})=y\boldsymbol{b}$$

式中 x、y 是纯量。根据平行四边形加法法则，有

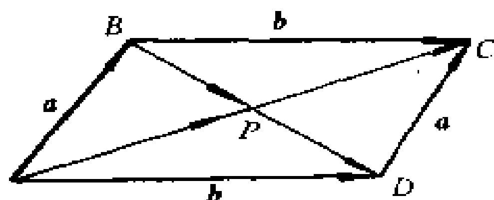
$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}\quad 或 \quad \boldsymbol{r}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$$

这就是所求的表达式。矢量 $x\boldsymbol{a}$、$y\boldsymbol{b}$ 分别称为矢量 $\boldsymbol{r}$ 在 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 方向的分矢量。纯量 x、y 的正负号依有关矢量的方向而定。很明显，对于 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{r}$ 而言，x、y 是唯一的。矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 称为基矢量。

1.4　已知不共面的三个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$，求三维空间里任一矢量 $\boldsymbol{r}$ 的表达式。

答：　$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$

1.5　试证平行四边形的对角线互相平分。



题 1.5 图

证：设平行四边形的对角线交点为 P（题 1.5 图）。

因为　$\overrightarrow{BD}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，所以 $\overrightarrow{BP}=x(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$

因为　$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AP}=y(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

但　$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{BP}$$

即　$$\boldsymbol{a}=y(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-x(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=(x+y)\boldsymbol{a}+(y-x)\boldsymbol{b}$$

因为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 不共线，所以 $x+y=1$，$y-x=0$，即 $x=y=\frac{1}{2}$，故 P 是对角线的中点。

1.6　(i) 若 O 是三角形中的任意一点，P、Q、R 分别是三角形 AB、BC、CA 的中点。证明 $OA+OB+OC=OP+OQ+OR$；

(ii) 如果 O 点在三角形之外，上述结论是否成立？并加以证明。

答：(ii)成立。

1.7　试证任意四边形中点的连线构成平行四边形。

证：设四边形 $ABCD$ 各边的中点为 P、Q、R、S(题1.7图)。由图可知

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),\ \overrightarrow{QR}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}),$$

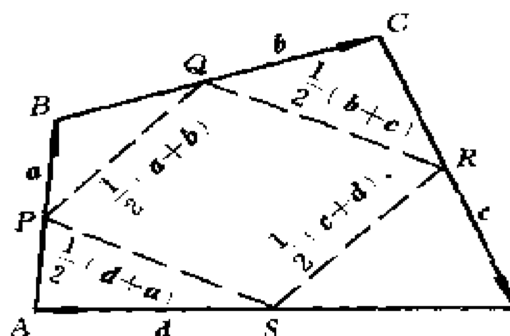
$$\overrightarrow{RS}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}),\ \overrightarrow{SP}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a})$$

但
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$$

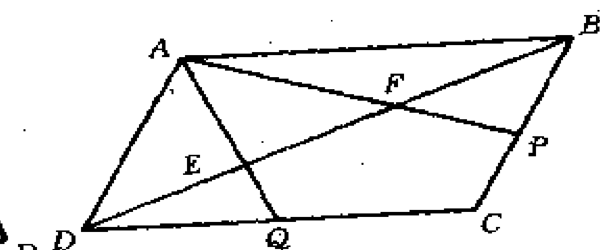
则
$$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=\overrightarrow{SR}$$

$$\overrightarrow{QR}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a})=\overrightarrow{PS}$$

两对边平行且相等，所以 $PQRS$ 是平行四边形。



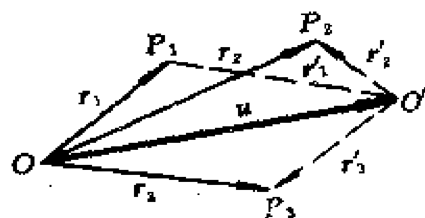
题 1.7 图



题 1.8 图

1.8　P、Q 分别是平行四边形两邻边 BC、DC 的中点，试证 AP、AQ 等分对角线 DB。

1.9　设 P_1、P_2、P_3 是相对于原点 O 的三个固定点，它们的位矢分别为 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$。试证明当且仅当 $a_1+a_2+a_3=0$，矢量方程 $a_1\boldsymbol{r}_1+a_2\boldsymbol{r}_2+a_3\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{0}$ 对原点成立时，则这类矢量方程对于任何其他的原点 O' 也成立。



题 1.9 图

证：设 P_1、P_2、P_3 点相对于 O' 点的位矢分别为 $\boldsymbol{r}'_1$、$\boldsymbol{r}'_2$、$\boldsymbol{r}'_3$，并设 O' 点相对于 O 点的位矢为 $\boldsymbol{u}$，现在找出使方程 $a_1\boldsymbol{r}'_1+a_2\boldsymbol{r}'_2+a_3\boldsymbol{r}'_3=\boldsymbol{0}$

在新参考系中成立的条件。

如图所示，$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{r}'_1$，$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{r}'_2$，$\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{r}'_3$

而且
$$a_1\boldsymbol{r}_1+a_2\boldsymbol{r}_2+a_3\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{0}$$

于是
$$\begin{aligned}a_1\boldsymbol{r}_1+a_2\boldsymbol{r}_2+a_3\boldsymbol{r}_3&=a_1(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{r}'_1)+a_2(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{r}'_2)+a_3(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{r}'_3)\\&=(a_1+a_2+a_3)\boldsymbol{u}+a_1\boldsymbol{r}'_1+a_2\boldsymbol{r}'_2+a_3\boldsymbol{r}'_3=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

欲使 $a_1\boldsymbol{r}'_1+a_2\boldsymbol{r}'_2+a_3\boldsymbol{r}'_3=\boldsymbol{0}$，只有当且仅当

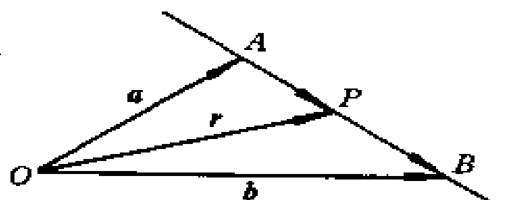
$$(a_1+a_2+a_3)\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}，即\ a_1+a_2+a_3=0$$

这个结论可适用于一般情况。

1.10　已知 P、Q 两点的位矢分别为 $\boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}_2=4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，试用 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 表示$\overrightarrow{PQ}$，并求其大小。

答：$2\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，　7。

1.11　A、B 两点相对于原点 O 的位矢分别为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，试求通过 A、B 的直线方程。



题 1.11 图

解：方法一　设 P 是通过 A、B 两点的直线上的一点，$\boldsymbol{r}$ 为 P 点的位矢。由题 1.11 图可看出：

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}\text{或 }\boldsymbol{a}+\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{r}，\quad\text{即 }\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}$$

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}\text{或 }\boldsymbol{a}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}，\quad\text{即 }\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$$

因为$\overrightarrow{AP}$与$\overrightarrow{AB}$共线，$\overrightarrow{AP}=t\,\overrightarrow{AB}$或 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}=t(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$

于是所求的方程是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+t(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\quad\text{或}\quad\boldsymbol{r}=(1-t)\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$$

方法二　因$\overrightarrow{AP}$与$\overrightarrow{PB}$共线，则有纯量 m 和 n，使得

$$m\,\overrightarrow{AP}=n\,\overrightarrow{PB}\quad\text{或}\quad m(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})=n(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{r})$$

解得
$$\boldsymbol{r}=\frac{m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}}{m+n}$$

1.12　不共线的 A、B、C 三点相对于原点 O 的位矢分别为 $\boldsymbol{a}$、

$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$，试证通过这三点的平面方程是 $\boldsymbol{r}=\dfrac{m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}+p\boldsymbol{c}}{m+n+p}$

式中 m、n、p 是纯量。并证明方程与原点选择无关。

1.13 设 $\boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}_3=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{r}_4=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$，若 $\boldsymbol{r}_4=a\boldsymbol{r}_1+b\boldsymbol{r}_2+c\boldsymbol{r}_3$，求 a、b、c。

解：根据题意，所求的是

$$\begin{aligned}3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}&=a(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})+b(\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})+c(-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})\\&=(2a+b-2c)\boldsymbol{i}+(-a+3b+c)\boldsymbol{j}+(a-2b-3c)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

因 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 不共线，所以

$$2a+b-2c=3,\quad -a+3b+c=2,\quad a-2b-3c=5$$

解得 $a=-2$，$b=1$，$c=-3$ 即 $\boldsymbol{r}_4=-2\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2-3\boldsymbol{r}_3$

矢量 $\boldsymbol{r}_4$ 称为与矢量 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$ 线性相关，或说 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$ 与 $\boldsymbol{r}_4$ 构成线性相关矢量组。

一般情况下，若有一组不全为零的纯量 α、β、γ、…，使得 $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}\cdots=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、…称为线性相关，否则称为线性无关。

1.14 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求：(i) $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$，(ii) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$，(iii) $|3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}|$，(iv) 与 $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$ 平行的单位矢量。

答：(i) $11\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{k}$，(ii) $\sqrt{93}$，(iii) $\sqrt{398}$，(iv) $\dfrac{3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}}{\sqrt{398}}$。

1.15 已知纯量场 $\Phi(x,y,z)=3(x)^2z-x(y)^3+5$，试求下列各点的 Φ 值：(i) $(0,0,0)$，(ii) $(1,-2,2)$，(iii) $(-1,-2,-3)$。

解：(i) $\Phi(0,0,0)=3(0)^2(0)-(0)(0)^3+5=5$，

(ii) $\Phi(1,-2,2)=3(1)^2(2)-(1)(-2)^3+5=19$，

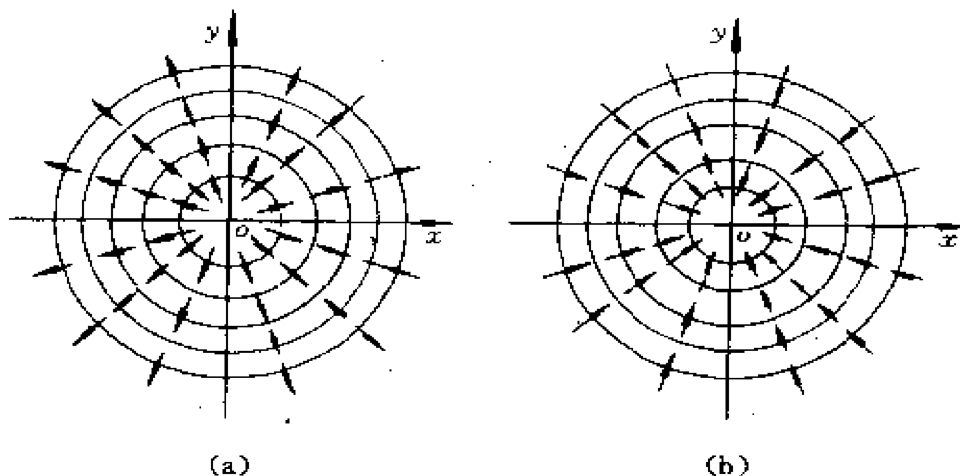
(iii) $\Phi(-1,-2,-3)=3(-1)^2(-3)-(-1)(-2)^3+5$
$=-12$。

1.16 已知纯量场 $\Phi(x,y,z)=4y(z)^3+3xyz+(z)^2+2$，求下列各点的 Φ 值：(i) $(1,-1,-2)$，(ii) $(0,-3,1)$。

答：(i) 36，(ii) -11。

1.17 作图描述下列矢量场：(i) $\boldsymbol{V}(x,y)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$，

(ii) $\boldsymbol{V}(x,y)=-x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}$，(iii) $\boldsymbol{V}(x,y,z)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$。



题 1.17 图

解：(i) 在 xoy 平面，对应每一点 (x,y) 唯一地有一矢量 $x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$，该矢量的模为 $\sqrt{(x)^2+(y)^2}$，方向是原点 o 向外发散。所有的 $x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$ 矢量均对应着圆 $(x)^2+(y)^2=a^2, a>0$ 上的一点（如图(a)）。亦即圆上各点法线（向外）方向就是矢量场的方向。

(ii) 对于矢量场 $\boldsymbol{V}(x,y)=-x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}$，与(i)的情况一样，但各点的矢量均与(ii)中的反向，如图(b)所示。

情况(i)称为有源场，o 点是场源。情况(ii)是汇聚场，o 点是汇聚点。

以上两种矢量场都与 z 无关，所以是二维场。

(iii) 因为场中的每个矢量的模是 $\sqrt{(x)^2+(y)^2+(z)^2}$，所有的点都在球面 $(x)^2+(y)^2+(z)^2=a^2$ 上，其中 $a>0$。场中各矢量是由球心 o 发出，并沿球面各点法线方向发散，故称为三维有源场。

1.19　试证　$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$。

证：设 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 是矢量 $\boldsymbol{a}$ 沿其本身方向的单位矢量，则 $(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影等于 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影加 $\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影，即

$$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\hat{\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{b}\cdot\hat{\boldsymbol{a}}+\boldsymbol{c}\cdot\hat{\boldsymbol{a}}$$

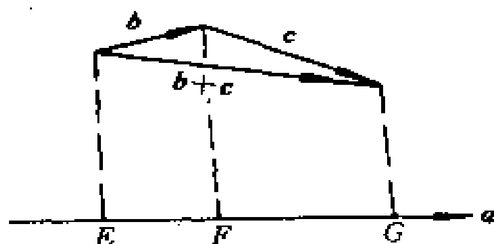
用 a 乘等式两边得　$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot a\hat{\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{b}\cdot a\hat{\boldsymbol{a}}+\boldsymbol{c}\cdot a\hat{\boldsymbol{a}}$

即 $$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$$

因矢量纯量积遵守交换律，所以

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$$

至此，矢量的纯量积遵守分配律得证。



题 1.19 图



题 1.23 图

1.21　若 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\alpha\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 垂直，试求 α 的值。

解：由两矢量互相垂直的条件 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(2)(4)+(\alpha)(-2)+(1)(-2)=8-2\alpha+2=0$$

所以　$\alpha=3$。

1.22　设 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，试求垂直于 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的单位矢量。

答：$\pm(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})/3$。

1.23　证明平面三角形的余弦定理。

证：由题 1.23 图可知

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\quad 或\quad \boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$$

于是 $$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

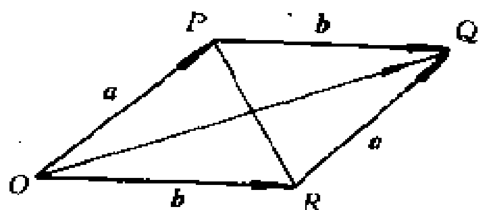
所以 $$(c)^2=(a)^2+(b)^2-2ab\cos\theta$$

1.24　设 $ABCD$ 是一平行四边形，试证 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$。

1.25　证明菱形的对角线互相垂直。

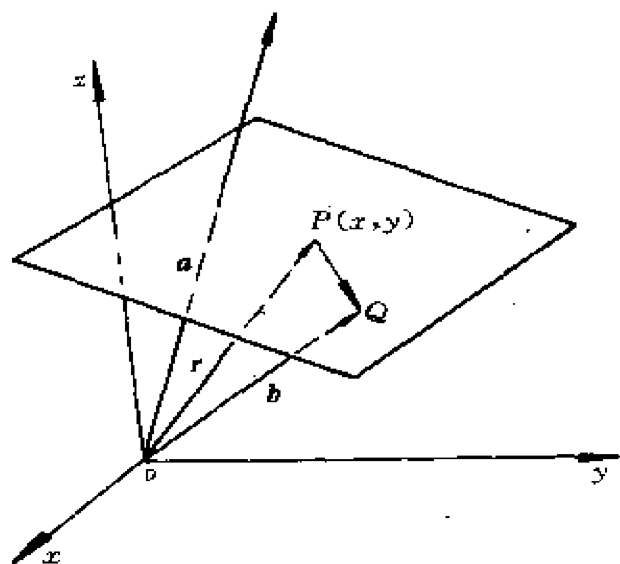
证：由图可知 $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，　$\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{OP}$ 或 $\boldsymbol{b}+\overrightarrow{RP}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{RP}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，于是　$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{RP}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=(a)^2$

$-(b)^2=0$ （因为 $a=b$），所以$\overrightarrow{OQ}$垂直于$\overrightarrow{RP}$。



题 1.25 图

1.27 试求与矢量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$ 垂直，并通过矢量 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 末端的平面方程。



题 1.27 图

解：设 P 点是所求平面上的一点，$\boldsymbol{r}$ 是 $P(x,y,z)$点的位矢，Q 点是矢量 $\boldsymbol{b}$ 的末端，Q 点显然应在所求的平面内。因为所求的平面要与矢量 $\boldsymbol{a}$ 垂直，所以在该平面内的矢量 $\overrightarrow{PQ}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{r}$ 应与 $\boldsymbol{a}$ 垂直，即

$$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{a}=0$$

或 $$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$$

这就是所求平面的矢量形式的方程。该方程用直角坐标形式表示是

$$(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\cdot(2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k})=(\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})\cdot(2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k})$$

即 $$2x+3y+6z=(1)(2)+(5)(3)+(3)(6)=35$$

1.28 设已知点(x_1,y_1,z_1)的位矢为 $\boldsymbol{a}$，任意点(x,y,z)的位矢为 $\boldsymbol{r}$，描述下列情况下 $\boldsymbol{r}$ 的轨迹：(i) $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|=3$，(ii) $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{a}=0$，(iii) $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{r}=0$。

答：(i) 中心在(x_1,y_1,z_1)，半径为 3 的球，(ii) 垂直于矢量 $\boldsymbol{a}$ 并通过其矢末端的平面，(iii) 中心在$\left(\frac{x_1}{2},\frac{y_1}{2},\frac{z_1}{2}\right)$、半径为 $\frac{1}{2}\sqrt{(x_1)^2+(y_1)^2+(z_1)^2}$或直径为 a 的球。

1.29　求题1.27中坐标原点到所作平面的距离。

解：从原点到平面的距离是 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影。

矢量 $\boldsymbol{a}$ 沿其自身的单位矢量是

$$\hat{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{a}}{a}=\frac{2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2)^2+(3)^2+(6)^2}}=\frac{2}{7}\boldsymbol{i}+\frac{3}{7}\boldsymbol{j}+\frac{6}{7}\boldsymbol{k}$$

$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}\cdot\hat{\boldsymbol{a}}&=(\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})\cdot\left(\frac{2}{7}\boldsymbol{i}+\frac{3}{7}\boldsymbol{j}+\frac{6}{7}\boldsymbol{k}\right)\\&=(1)\left(\frac{2}{7}\right)+(5)\left(\frac{3}{7}\right)+(3)\left(\frac{6}{7}\right)=5\end{aligned}$$

1.30　已知 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$ 分别为 P、Q 两点的位矢。试求(i) 通过 Q 点并与 $\overline{PQ}$ 直线垂直的平面方程，(ii) 计算从[−1,1,1)点到平面的距离。

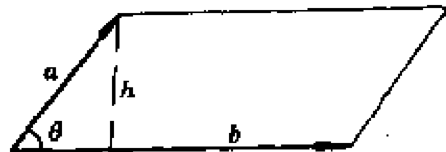
答：(i) $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$ 或 $2x+3y+6z=-28$，(ii) 6。

1.31　试证以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形面积是 $|a\times b|$。

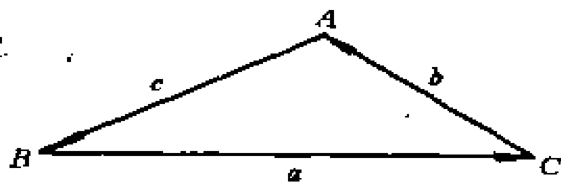
证：平行四边形的面积

$$\square=hb=a\sin\theta b=|a\times b|$$

顺便提一下，以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的三角形面积是 $\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$。



题1.31图



题1.33图

1.32　设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，试求：(i) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，(ii) $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，(iii) $|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|$。

答：(i) $\sqrt{195}$，(ii) $-25\boldsymbol{i}+35\boldsymbol{j}-55\boldsymbol{k}$，(iii) $2\sqrt{195}$。

1.33　试证平面三角形的正弦定理。

证：设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为三角形的三条边，如图所示。则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$。连续地用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 与该矢量方程作矢积，即 $\boldsymbol{a}\times(\quad)$，$\boldsymbol{b}\times(\quad)$，$\boldsymbol{c}\times$

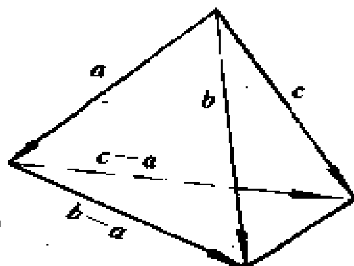
(　),得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$$

即
$$ab\sin C=bc\sin A=ca\sin B$$

或
$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

1.35　设 $\boldsymbol{V}_1$、$\boldsymbol{V}_2$、$\boldsymbol{V}_3$、$\boldsymbol{V}_4$ 四矢量的模分别等于四面体四个表面 F_1、F_2、F_3、F_4 的面积,矢量的方向是这些表面向外的法线方向,试证 $\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2+\boldsymbol{V}_3+\boldsymbol{V}_4=\boldsymbol{0}$。



题 1.35 图

证:在证题 1.31 时已经说明,以 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$ 为边的三角形面积是 $\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|$。

四面体每个面的矢量是

$$\boldsymbol{V}_1=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\qquad \boldsymbol{V}_2=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},$$

$$\boldsymbol{V}_3=\frac{1}{2}\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a},\qquad \boldsymbol{V}_4=\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2+\boldsymbol{V}_3+\boldsymbol{V}_4&=\frac{1}{2}[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\\&\quad+(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})]\\&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\\&\quad-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

这个结论可推广到封闭的任意多面体。

1.36　设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$, 试求:(i) $|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}|$, (ii) $|\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|$, (iii) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$, (iv) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$, (v) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$, (vi) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$。

答:　(i) $5\sqrt{26}$,　(ii) $3\sqrt{10}$,　(iii) -20, (iv) -20, (v) $-40\boldsymbol{i}-20\boldsymbol{j}+20\boldsymbol{k}$, (vi) $35\boldsymbol{i}-35\boldsymbol{j}+35\boldsymbol{k}$。

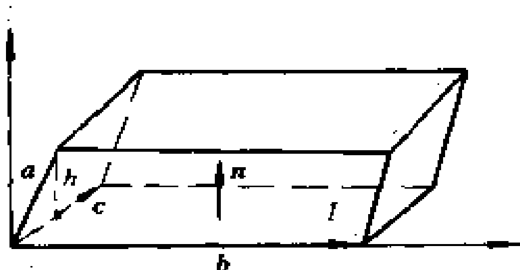
1.37　试证 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 是以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为邻边的平行六面体体积的绝对值。

证:设 $\boldsymbol{n}$ 是 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 构成的平行四边形 I 的单位法向矢量,h 是

矢量 $\boldsymbol{a}$ 末端到平行四边形 I 的高。因为平行六面体体积等于平行四边形(底)的面积乘高，所以

$$V=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n})(|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|)=\boldsymbol{a}\cdot[|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|\boldsymbol{n}]=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$$

若 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 构成左手系，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}<0$，命题得证。



题 1.37 图

1.38 求对角线为 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ 的平行四边形的面积。

答：$5\sqrt{3}$。

1.39 试证 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$。

证：因为 $$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

根据行列式的行与行或列与列对调一次，就改变行列式一次正负号的性质，故有

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}b_1 & b_2 & b_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})$$

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}c_1 & c_2 & c_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c_1 & c_2 & c_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

1.41 试证矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面的充分与必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=0$。

证：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=0$ 可以写成 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$

如果 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面，则 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为邻边的平行六面体的体积为零，由题 1.37 知，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$。

如果 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$，则由 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 构成的平行六面体体积为零，所以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 必定共面。

1.42　化简$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$。

答：$2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$。

1.43　试证$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$。

证：由题1.40可知　$\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{d}$　设$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 则

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}]\cdot\boldsymbol{d}=[\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})]\cdot\boldsymbol{d}$$
$$=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$

1.45　试证$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0$。

证：由式(1.37)有

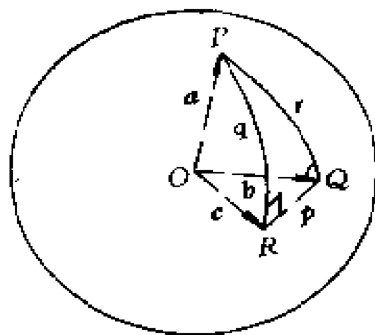
$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$
$$\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$
$$\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})$$

三式相加后等于零。

1.47　试证球面三角形的正弦定理。

证：设PQR是一球面上的三角形，三角形的三边是三段球面弧长，题目要求证明的是

$$\frac{\sin P}{\sin p}=\frac{\sin Q}{\sin q}=\frac{\sin R}{\sin r}$$



题1.47图

设球的半径是单位长，从球心O到P、Q、R各点的矢径分别为单位矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$。根据例1.12有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\boldsymbol{a} \tag{i}$$

垂直于$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$的单位矢量是$\boldsymbol{a}$，于是式(i)成为

$$\sin r\sin q\sin P\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\boldsymbol{a} \tag{ii}$$

或

$$\sin r\sin q\sin P=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} \tag{iii}$$

将p,q,r；P,Q,R和$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$轮换，得

$$\sin p\sin r\sin Q=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a} \tag{iv}$$

$$\sin q\sin p\sin R=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \tag{v}$$

由例 1.39 知，式(iii)、式(iv)和式(v)的右边相等，故有

$$\sin r\sin q\sin P=\sin p\sin r\sin Q=\sin q\sin p\sin R$$

于是

$$\frac{\sin P}{\sin p}=\frac{\sin Q}{\sin q}=\frac{\sin R}{\sin r}$$

1.49 试证$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^2$。

证：由式(1.36)有

$$\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{c})$$

设 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，则

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})&=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c})\\&=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\end{aligned}$$

又
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\\&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\\&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^2\end{aligned}$$

1.50 求矢量组 $2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 的对偶矢量组。

答：$\frac{2}{3}\boldsymbol{i}-\frac{1}{3}\boldsymbol{k}$，$-\frac{8}{3}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\frac{7}{3}\boldsymbol{k}$，$-\frac{7}{3}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\frac{5}{3}\boldsymbol{k}$。

1.51 已知 $\boldsymbol{e}_1'=\dfrac{\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}$，$\boldsymbol{e}_2'=\dfrac{\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1}{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}$，$\boldsymbol{e}_3'=\dfrac{\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2}{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}$，若$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3\neq0$，试证：(i) 若 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=V$，则 $\boldsymbol{e}_1'\cdot\boldsymbol{e}_2'\times\boldsymbol{e}_3'=\dfrac{1}{V}$；(ii) 若 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 不共面，则 $\boldsymbol{e}_1'$、$\boldsymbol{e}_2'$、$\boldsymbol{e}_3'$ 也不共面。

证：$\boldsymbol{e}_1'=\dfrac{\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}{V}$，$\boldsymbol{e}_2'=\dfrac{\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1}{V}$，$\boldsymbol{e}_3'=\dfrac{\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2}{V}$

则
$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_1'\cdot\boldsymbol{e}_2'\times\boldsymbol{e}_3'&=\frac{(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)\cdot(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1)\times(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)}{V^3}\\&=\frac{(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)\times(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1)}{V^3}\end{aligned}$$

利用题 1.49 可得

$$\boldsymbol{e}_1' \cdot \boldsymbol{e}_2' \times \boldsymbol{e}_3' = \frac{(\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3)^2}{V^3} = \frac{V^2}{V^3} = \frac{1}{V}$$

(ii) 由题 1.41 知，如果 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 不共面，则 $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 \neq 0$。从题 1.51 证明的结果可知 $\boldsymbol{e}_1' \cdot \boldsymbol{e}_2' \times \boldsymbol{e}_3' \neq 0$，所以 $\boldsymbol{e}_1'$、$\boldsymbol{e}_2'$ 和 $\boldsymbol{e}_3'$ 不共面。

第二章　矢量分析

2.1　已知 $\boldsymbol{a}=\sin t\boldsymbol{i}+\cos t\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$，试求：(i) $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$，(ii) $\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}$，(iii) $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right|$，(iv) $\left|\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right|$。

解：(i) $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin t)\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos t)\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t)\boldsymbol{k}=\cos t\boldsymbol{i}-\sin t\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

(ii) $\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right)=-\sin t\boldsymbol{i}-\cos t\boldsymbol{j}$

(iii) $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right|=\sqrt{(\cos t)^2+(-\sin t)^2+(1)^2}=\sqrt{2}$

(iv) $\left|\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right|=\sqrt{(-\sin t)^2+(-\cos t)^2}=1$

2.2　已知 $\boldsymbol{a}=e^{-t}\boldsymbol{i}+\ln(t^2+1)\boldsymbol{j}-\mathrm{tg}t\boldsymbol{k}$，试求：$t=0$ 时的 (i) $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$，(ii) $\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}$，(iii) $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right|$，(iv) $\left|\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right|$。

答：(i) $-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$，(ii) $\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$，(iii) $\sqrt{2}$，(iv) $\sqrt{5}$。

2.3　曲线 C 的参数方程为 $x=x(s),y=y(s),z=z(s)$，式中 s 是从曲线 C 上一定点沿着 C 量得的弧长。设 $\boldsymbol{r}$ 是曲线 C 上任一点 P 的位矢，试证明 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}s$ 是曲线 C 在该点的切线单位矢量。

证：

矢量 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{k}$ 与曲线 $x=x(s),y=y(s),z=z(s)$ 相切。

再证此矢量的模为 1。因为 $(\mathrm{d}s)^2=(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2$，所以

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right|=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)^2}=\sqrt{\frac{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}{(\mathrm{d}s)^2}}=1$$

2.4　试求曲线 $x=a\cos\omega t,y=a\sin\omega t,z=bt$（$a$、$b$、$\omega$ 是常数）上任一点的切线单位矢量。

答：$\dfrac{-a\omega\sin\omega t\boldsymbol{i}+a\omega\cos\omega t\boldsymbol{j}+b\boldsymbol{k}}{\sqrt{a^2\omega^2+b^2}}$。

2.5　设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是纯量 u 的可导函数，试证：

(i) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{b}$，(ii) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{b}$。

证：方法一

(i)
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{a}\cdot\Delta\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{a}\cdot\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\boldsymbol{a}\cdot\frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t}+\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}\cdot\boldsymbol{b}+\frac{\Delta\boldsymbol{a}\cdot\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t}\right)\\&=\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

因为 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{a}\cdot\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t}=0$

(ii)
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{a}\times\Delta\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{a}\times\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\boldsymbol{a}\times\frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t}+\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}\times\boldsymbol{b}+\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}\times\Delta\boldsymbol{b}\right)\\&=\boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

因为 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}\times\Delta\boldsymbol{b}=0$

方法二

(i) 设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\\&=\left(a_1\frac{\mathrm{d}b_1}{\mathrm{d}t}+a_2\frac{\mathrm{d}b_2}{\mathrm{d}t}+a_3\frac{\mathrm{d}b_3}{\mathrm{d}t}\right)\\&\quad+\left(\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}t}b_1+\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}t}b_2+\frac{\mathrm{d}a_3}{\mathrm{d}t}b_3\right)\\&=\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

(ii)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$$

利用行列式的求导定理,得

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\\frac{\mathrm{d}b_1}{\mathrm{d}t}&\frac{\mathrm{d}b_2}{\mathrm{d}t}&\frac{\mathrm{d}b_3}{\mathrm{d}t}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}t}&\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}t}&\frac{\mathrm{d}a_3}{\mathrm{d}t}\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=\boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{b}$$

2.6 设 $\boldsymbol{a}=t^2\boldsymbol{i}-t\boldsymbol{j}+(2t+1)\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=(2t-3)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-t\boldsymbol{k}$,试求:$t=1$ 时(i) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$,(ii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$,(iii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|$,(iv) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}\right)$。

答:(i) $-\boldsymbol{b}$,(ii) $7\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$,(iii)1,(iv) $\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$。

2.7 试求$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right)$。

解: 根据例题 2.1,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right)=\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^3}+\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}$$

$$=\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^3}+0+0$$

$$=\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^3}$$

2.8 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是 s 的可导函数,试求$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}s}-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{b}\right)$。

答:$\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\cdot\boldsymbol{b}$。

2.9 设 $\boldsymbol{a}$ 的大小为常量且$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right|\neq 0$,试证明 $\boldsymbol{a}$ 与$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$互相垂直。

证:因为 $\boldsymbol{a}$ 的大小为常量,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=$常量。

于是 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}=0$$

可见 $\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}=0$，$|\mathrm{d}\boldsymbol{a}/\mathrm{d}t|\neq 0$，必有 $\boldsymbol{a}$ 与 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$ 互相垂直。

2.10　设 $\boldsymbol{a}(t)=3t^2\boldsymbol{i}-(t+4)\boldsymbol{j}-(t^2-2t)\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}(t)=\sin t\boldsymbol{i}+3e^{-t}\boldsymbol{j}-3\cos t\boldsymbol{k}$，试求：$t=0$ 时的 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$。

答：$-30\boldsymbol{i}+14\boldsymbol{j}+20\boldsymbol{k}$。

2.11　试证 $\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}=a\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$。

证：方法一

设　$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，则 $a=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{-1/2}\left(2a_1\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}t}+2a_2\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}t}+2a_3\frac{\mathrm{d}a_3}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$=\frac{a_1\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}t}+a_2\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}t}+a_3\frac{\mathrm{d}a_3}{\mathrm{d}t}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}}{a}$$

所以 $$\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}=a\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$$

方法二

因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=a^2$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a^2)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$$

且 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a^2)=2a\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$$

所以　$2\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}=2a\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$　即　$\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}=a\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$

如果 a 是常矢量且 $\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}=0$，就是题 2.9 所证的结果。

2.13　设 $\boldsymbol{F}$ 是 x,y,z,t 的函数，而 x,y,z 又是 t 的函数，并且都是可导函数，试证

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

证：设 $\boldsymbol{F}=F_1(x,y,z,t)\boldsymbol{i}-F_2(x,y,z,t)\boldsymbol{j}+F_3(x,y,z,t)\boldsymbol{k}$

则 $$\begin{aligned}\mathrm{d}F&=\mathrm{d}F_1\boldsymbol{i}+\mathrm{d}F_2\boldsymbol{j}+\mathrm{d}F_3\boldsymbol{k}\\&=\left(\frac{\partial F_1}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\partial F_1}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F_1}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial F_1}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\boldsymbol{i}\\&\quad+\left(\frac{\partial F_2}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\partial F_2}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F_2}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial F_2}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\boldsymbol{j}\\&\quad+\left(\frac{\partial F_3}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\partial F_3}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F_3}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial F_3}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\boldsymbol{k}\\&=\left(\frac{\partial F_1}{\partial t}\boldsymbol{i}+\frac{\partial F_2}{\partial t}\boldsymbol{j}+\frac{\partial F_3}{\partial t}\boldsymbol{k}\right)\mathrm{d}t+\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial F_2}{\partial x}\boldsymbol{j}+\frac{\partial F_3}{\partial x}\boldsymbol{k}\right)\mathrm{d}x\\&\quad+\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\boldsymbol{i}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial F_3}{\partial y}\boldsymbol{k}\right)\mathrm{d}y+\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\boldsymbol{i}+\frac{\partial F_2}{\partial z}\boldsymbol{j}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\mathrm{d}z\\&=\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial z}\mathrm{d}z\end{aligned}$$

所以 $$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}=\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

2.14　设 $\boldsymbol{a}=\cos xy\boldsymbol{i}+(3xy-2x^2)\boldsymbol{j}-(3x-2y)\boldsymbol{k}$，试求：$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x}$，$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial y\partial x}$。

答：$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x}=y\sin xy\boldsymbol{i}+(3y-4x)\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，

$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y}=-x\sin xy\boldsymbol{i}+3x\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，

$\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial x^2}=-y^2\cos xy\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$，$\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial y^2}=-x^2\cos xy\boldsymbol{i}$，

$\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial y\partial x}=-(xy\cos xy+\sin xy)\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$

2.15　设 $\boldsymbol{a}=x^2yz\boldsymbol{i}-2xz^3\boldsymbol{j}+xz^2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2z\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}-x^2\boldsymbol{k}$，试求点 $(1,0,-2)$ 的 $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$。

解：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x^2yz&-2xz^3&xz^2\\2z&y&-x^2\end{vmatrix}$$

$$=(2x^3y^3-xyz^2)\boldsymbol{i}+(2xz^3+x^4yz)\boldsymbol{j}+(x^2y^2z+4xz^4)\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{\partial x}=(6x^2z^3-yz^2)\boldsymbol{i}+(2z^3+4x^3yz)\boldsymbol{j}+(2xy^2z+4z^4)\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial^2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{\partial x\partial y}=-z^2\boldsymbol{i}+4x^3z\boldsymbol{j}+4xyz\boldsymbol{k}$$

在点(1,0,−2)处，$\frac{\partial^2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{\partial x\partial y}=-4\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}$

2.17　设 $\boldsymbol{R}(u)=(u-u^2)\boldsymbol{i}+2u^3\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，试求：(i) $\int \boldsymbol{R}u\mathrm{d}(u)$，(ii) $\int_1^2\boldsymbol{R}(u)\mathrm{d}u$。

解：

(i)
$$\int\boldsymbol{R}(u)\mathrm{d}u=\int[(u-u^2)\boldsymbol{i}+2u^3\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}]\mathrm{d}u$$
$$=\boldsymbol{i}\int(u-u^2)\mathrm{d}u+\boldsymbol{j}\int2u^3\mathrm{d}u+\boldsymbol{k}\int-3\mathrm{d}u$$
$$=\boldsymbol{i}\left(\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{3}+c_1\right)+\boldsymbol{j}\left(\frac{u^4}{2}-c_2\right)+\boldsymbol{k}(-3u+c_3)$$
$$=\left(\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{3}\right)\boldsymbol{i}+\frac{u^4}{2}\boldsymbol{j}-3u\boldsymbol{k}+\boldsymbol{c}$$

式中 $\boldsymbol{c}=c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k}$

(ii)
$$\int_1^2\boldsymbol{R}(u)\mathrm{d}u=\left[\left(\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{3}\right)\boldsymbol{i}+\frac{u^4}{2}\boldsymbol{j}-3u\boldsymbol{k}+\boldsymbol{c}\right]_1^2$$
$$=-\frac{5}{6}\boldsymbol{i}+\frac{15}{2}\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$$

2.18　设 $\boldsymbol{R}(t)=(3t^2-t)\boldsymbol{i}+(2-6t)\boldsymbol{j}-4t\boldsymbol{k}$，试求：(i) $\int\boldsymbol{R}(t)\mathrm{d}t$，(ii) $\int_2^4\boldsymbol{R}(t)\mathrm{d}t$。

答：(i) $(t^3-t^2/2)\boldsymbol{i}+(2t-3t^2)\boldsymbol{j}-2t^2\boldsymbol{k}+\boldsymbol{c}$，(ii) $50\boldsymbol{i}-32\boldsymbol{j}-24\boldsymbol{k}$。

2.19　试求 $\int\boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{d}t$。

解：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right)=\boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}$

积分 $\int\boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t=\boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{c}$

2.20　设 $\boldsymbol{a}=t\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2t\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，试求：(i) $\int_1^2 \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\mathrm{d}t$，(ii) $\int_1^2 \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\mathrm{d}t$。

答：(i) 0，(ii) $-\frac{87}{2}\boldsymbol{i}-\frac{44}{3}\boldsymbol{j}+\frac{15}{2}\boldsymbol{k}$。

2.21　证明行星的轨道是椭圆，太阳是椭圆的一个焦点。

证：由理论力学知，质点在有心力作用的运动微分方程及其动量矩可写为

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-\frac{GMm}{r^2}\boldsymbol{r}_1\text{，即}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-\frac{GM}{r^2}\boldsymbol{r}_1 \tag{1}$$

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{H}=\boldsymbol{h} \tag{2}$$

又 $\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{r}_1$，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}_1$，即

$$\boldsymbol{h}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}=r\boldsymbol{r}_1\times\left(r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}_1\right)=r^2\boldsymbol{r}_1\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t} \tag{3}$$

由式(1)　$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{h}=-\frac{GM}{r^2}\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{h}=-GM\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_1\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t}$

$$=-GM\left[\left(\boldsymbol{r}_1\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t}\right)\boldsymbol{r}_1-(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_1)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t}\right]=GM\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t}$$

上式是因为 $\boldsymbol{r}_1\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t}=0$（见题 2.9）

但由于 $\boldsymbol{h}$ 是常矢，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{h})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{h}$，所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{h})=GM\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t}$$

积分得　$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{h}=GM\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{p}$

由此　$\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{h})=GM\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}$

$$=GMr+r\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{p}=GMr+rp\cos\theta$$

式中 $\boldsymbol{p}$ 是模为 p 的任意常矢，θ 是 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{r}_1$ 的夹角。

因为　$\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{h})=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{h}=\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{h}=h^2$

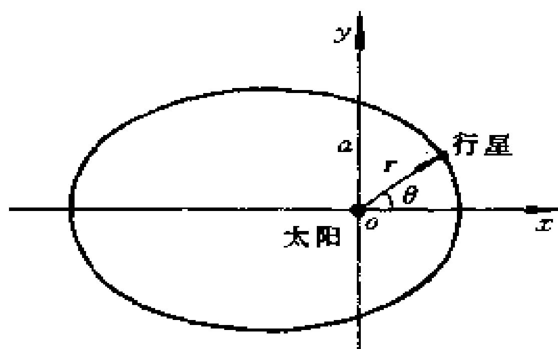
故有　$h^2=GMr+rp\cos\theta$

$$r=\frac{h^2}{GM+p\cos\theta}=\frac{h^2/GM}{1-(p/GM)\cos\theta}$$

由解析几何可知，焦点在原点，偏心率为 ϵ 的圆锥截面极坐标方程是

$$r=\frac{a}{r+\varepsilon\cos\theta}$$

式中 a 为常数。将这个方程与上面所推得的方程比较，而且行星的轨道是封闭曲线，所以行星的轨道是椭圆曲线。



题 2.21 图

2.22　设 $\boldsymbol{a}(2)=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{a}(3)=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，试求 $\int_2^3\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$。

答：10。

2.23　设 $\Phi(x,y,z)=3x^2y-y^3z^2$，试求在点 $P(1,-2,1)$ 的 $\nabla\Phi$（即 $\mathrm{grad}\Phi$）。

解：
$$\begin{aligned}\nabla\Phi&=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)(3x^2y-y^3z^2)\\&=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}(3x^2y-y^3z^2)+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y-y^3z^2)\\&\quad+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}(3x^2y-y^3z^2)\\&=6xy\boldsymbol{i}+(3x^2-3y^2z^2)\boldsymbol{j}-2y^3z\boldsymbol{k}\\&=-12\boldsymbol{i}-9\boldsymbol{j}-16\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

2.24　设 $\boldsymbol{a}=2x^2\boldsymbol{i}-3xz\boldsymbol{j}+xz^2\boldsymbol{k}$，$\Phi=2x-x^3y$，试求在点 $P(1,-1,1)$ 的 $\boldsymbol{a}\cdot\nabla\Phi$ 与 $\boldsymbol{a}\times\nabla\Phi$。

答：5，$7\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-11\boldsymbol{k}$。

2.25　设(i) $\Phi=\ln|\boldsymbol{r}|$，　(ii) $\Phi=\frac{1}{r}$，试求 $\nabla\Phi$。

解：

(i) $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，　则 $|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\Phi=\ln|\boldsymbol{r}|=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)$$

$$\nabla\Phi=\frac{1}{2}\nabla\ln(x^2+y^2+z^2)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}\ln(x^2+y^2+z^2)+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}\ln(x^2+y^2+z^2)\right.$$

$$\left.+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\ln(x^2+y^2+z^2)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{i}\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}+\boldsymbol{j}\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}+\boldsymbol{k}\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

$$=(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})/(x^2+y^2+z^2)=\boldsymbol{r}/r^2$$

(ii)

$$\nabla\Phi=\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=\nabla\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\nabla[(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}]$$

$$=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$$

$$+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$$

$$=\boldsymbol{i}\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}2x\right]+\boldsymbol{j}\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}2y\right]$$

$$+\boldsymbol{k}\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}2z\right]$$

$$=-\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=-\boldsymbol{r}/r^3$$

2.26　试求$\nabla|\boldsymbol{r}|^3$。

答：$3r\boldsymbol{r}$。

2.27　试证$\nabla r^n=nr^{n-2}\boldsymbol{r}$。

证：$\nabla r^n=\nabla(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^n=\nabla(x^2+y^2+z^2)^{n/2}$

$$=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}[(x^2+y^2+z^2)^{n/2}]+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}[(x^2+y^2+z^2)^{n/2}]$$

$$+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}[(x^2+y^2+z^2)^{n/2}]$$

$$=\boldsymbol{i}\left[\frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}2x\right]+\boldsymbol{j}\left[\frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}2y\right]$$

$$+\boldsymbol{k}\left[\frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}2z\right]$$

$$=n(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$$

$=n(r^2)^{\frac{n}{2}-1}\boldsymbol{r}=nr^{n-2}\boldsymbol{r}$

注意，若 $\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{r}_1$，式中 $\boldsymbol{r}_1$ 是 $\boldsymbol{r}$ 方向的单位矢量，则 $\nabla r^n=nr^{n-1}\boldsymbol{r}_1$。

2.28 试求 $\nabla(3r^2-4\sqrt{r}+6/\sqrt[3]{r})$。

答：$(6-2r^{-3/2}-2r^{-7/3})\boldsymbol{r}$。

2.29 试证 $\nabla\Phi$ 垂直于曲面 $\Phi(x,y,z)=C$，式中 C 为常数。

证：设 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 是曲面上点 $P(x,y,z)$ 的位矢，则 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k}$ 在曲面过点 P 的切平面内。

但
$$\mathrm{d}\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathrm{d}z=0$$

或
$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k})=0$$

即 $\nabla\Phi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0$，所以 $\nabla\Phi$ 垂直于 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，也就垂直于曲面。

2.31 试求曲面 $2xz^2-3xy-4x=7$ 在点(1,−1,2)的切平面方程。

解：$\nabla(2xz^2-3xy-4x)=(2z^2-3y-4)\boldsymbol{i}-3x\boldsymbol{j}+4xz\boldsymbol{k}$ 过点(1,−1,2)曲面的法线是 $7\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$

过位矢为 $\boldsymbol{r}_0$ 的一点并与法线 N 垂直的平面方程 $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{N}=0$(参看题 1.27)，所以要求的方程是

$$[(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})-(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})]\cdot(7\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})=0$$
$$7(x-1)-3(y+1)+8(z-2)=0$$

2.32 试求曲面 $z=x^2+y^2$ 在点(2,−1,5)的切平面方程与法线方程。

答：$4x-2y-z=5,\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-5}{-1}$ 或 $x=4t+2,y=-2t-1,z=-t+5$。

2.33 试证 Φ 的最大变化率(即最大方向导数)的模与方向就是 $\nabla\Phi$ 的模与方向。

证:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}$$

$$=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{k}\right)$$

$$=\nabla\Phi\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$$

因为$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$是单位矢量，$\nabla\Phi\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$是$\nabla\Phi$沿$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$方向的投影。当$\nabla\Phi$与$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$同方向时，其投影为最大，所以方向导数$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s}$的最大值是$|\nabla\Phi|$，$\nabla\Phi$与$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$同向。

2.34 设$\Phi=axy^2+byz+cz^2x^3$在点(1，2，−1)的梯度$\nabla\Phi$平行于z轴，模的最大值为64，试求常数a、b、c的值。

答：$a=6$，$b=24$，$c=-8$。

2.35 试求曲面$x^2+y^2+z^2=9$与$z=x^2+y^2-3$在点(2，−1，2)的夹角。

解：两曲面在某点的夹角定义为两曲面过该点法线之间的夹角。

过点(2，−1，2)曲面$x^2+y^2+z^2=9$的法线为

$$\nabla\Phi_1=\nabla(x^2+y^2+z^2)=2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$$

过点(2，−1，2)曲面$z=x^2+y^2-3$（或$x^2+y^2-z=3$）的法线为

$$\nabla\Phi_2=\nabla(x^2+y^2-z)=2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$$

$(\nabla\Phi_1)\cdot(\nabla\Phi_2)=|\nabla\Phi_1||\nabla\Phi_2|\cos\theta$，式中$\theta$就是所要求的夹角，于是

$$(4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})\cdot(4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})=|4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}||4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}|\cos\theta$$

$$16+4-4=\sqrt{(4)^2+(-2)^2+(4)^2}\sqrt{(4)^2+(-2)^2+(-1)^2}\cos\theta$$

$$\cos\theta=8\sqrt{21}/63=0.5819,\theta=54^\circ25'$$

2.36 设曲面$ax^2-byz=(a+2)x$与$4x^2y+z^3=4$在点(1，

$-1,2)$正交，试求常数 a、b 的值。

答：$a=5/2, b=1$。

2.37　已知 $\Phi=2x^3y^2z^4$，试求 $\nabla\cdot\nabla\Phi$（即 div gradΦ），并证明 $\nabla\cdot\nabla\Phi=\nabla^2\Phi$。

解：

(i) $$\nabla\Phi=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}(2x^3y^2z^4)+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}(2x^3y^2z^4)+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}(2x^3y^2z^4)$$
$$=6x^2y^2z^4\boldsymbol{i}+4x^3yz^4\boldsymbol{j}+8x^3y^2z^3\boldsymbol{k}$$
$$\nabla\cdot\nabla\Phi=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(6x^2y^2z^4\boldsymbol{i}+4x^3yz^4\boldsymbol{j}+8x^3y^2z^3\boldsymbol{k})$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}(6x^2y^2z^4)+\frac{\partial}{\partial y}(4x^3yz^4)+\frac{\partial}{\partial z}(8x^3y^2z^3)$$
$$=12xy^2z^4+4x^3z^4+24x^3y^2z^2$$

(ii) $$\nabla\cdot\nabla\Phi=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$
$$=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi=\nabla^2\Phi$$

2.38　设 $\boldsymbol{a}=3xyz^2\boldsymbol{i}+2xy^3\boldsymbol{j}-x^2yz\boldsymbol{k}$，$\Phi=3x^2-yz$，试求在点 $(1,-1,1)$ 的：(i) $\nabla\cdot\boldsymbol{a}$，(ii) $\boldsymbol{a}\cdot\nabla\Phi$，(iii) $\nabla\cdot(\Phi\boldsymbol{a})$，(iv) $\nabla\cdot(\nabla\Phi)$。

答：(i) 4，(ii) -15，(iii) 1，(iv) 6。

2.39　试证：(i) $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\cdot\boldsymbol{a}+\nabla\cdot\boldsymbol{b}$，(ii) $\nabla\cdot(\Phi\boldsymbol{a})=(\nabla\Phi)\cdot\boldsymbol{a}+\Phi(\nabla\cdot\boldsymbol{a})$。

证：

设　　$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$

(i) $$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot[(a_1+b_1)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2)\boldsymbol{j}+(a_3+b_3)\boldsymbol{k}]$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}(a_1+b_1)+\frac{\partial}{\partial y}(a_2+b_2)+\frac{\partial}{\partial z}(a_3+b_3)$$

$$=\frac{\partial a_1}{\partial x}+\frac{\partial a_2}{\partial y}+\frac{\partial a_3}{\partial z}+\frac{\partial b_1}{\partial x}+\frac{\partial b_2}{\partial y}+\frac{\partial b_3}{\partial z}$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})$$

$$=\nabla\cdot\boldsymbol{a}+\nabla\cdot\boldsymbol{b}$$

(ii) $\nabla\cdot(\Phi\boldsymbol{a})=\nabla\cdot(\Phi a_1\boldsymbol{i}+\Phi a_2\boldsymbol{j}+\Phi a_3\boldsymbol{k})$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(\Phi a_1)+\frac{\partial}{\partial y}(\Phi a_2)+\frac{\partial}{\partial z}(\Phi a_3)$$

$$=\frac{\partial\Phi}{\partial x}a_1+\Phi\frac{\partial a_1}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}a_2+\Phi\frac{\partial a_2}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}a_3+\Phi\frac{\partial a_3}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial\Phi}{\partial x}a_1+\frac{\partial\Phi}{\partial y}a_2+\frac{\partial\Phi}{\partial z}a_3+\Phi\left(\frac{\partial a_1}{\partial x}+\frac{\partial a_2}{\partial y}+\frac{\partial a_3}{\partial z}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})$$

$$+\Phi\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})$$

$$=(\nabla\Phi)\cdot\boldsymbol{a}+\Phi(\nabla\cdot\boldsymbol{a})$$

2.40 试求$\nabla^2(\ln r)$。

答:$1/r^2$。

2.41 试证$\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=0$。

证:设$\Phi=r^{-3}$,$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}$,代入题 2.39(ii),

$$\nabla\cdot(r^{-3}\boldsymbol{r})=(\nabla r^{-3})\cdot\boldsymbol{r}+(r^{-3})\nabla\cdot\boldsymbol{r}$$

$$=-3r^{-5}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}+3r^{-3}=0$$

上式利用了题 2.27 的结果。

2.43 设$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}/r^n$,$n>0$(其中$r=|\boldsymbol{r}|$,$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$)、试求$\nabla\cdot\boldsymbol{a}$。

解:$\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^n}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^n}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^n}\right)$

$$=\frac{1}{r^n}-\frac{nxx}{r^{n+1}r}+\frac{1}{r^n}-\frac{nyy}{r^{n+1}r}+\frac{1}{r^n}-\frac{nzz}{r^{n+1}r}$$

$$=\frac{3}{r^n}-\frac{nr^2}{r^{n+2}}=\frac{3-n}{r^n}$$

2.44　试求：(i) $\nabla\cdot(r^3\boldsymbol{r})$，(ii) $\nabla\cdot[r\nabla(1/r^3)]$，(iii) $\nabla^2[\nabla\cdot(\boldsymbol{r}/r^2)]$。

答：(i) $6r^3$，(ii) $3r^{-4}$，(iii) $2r^{-4}$。

2.45　设$\boldsymbol{a}=xy^3\boldsymbol{i}-2x^2yz\boldsymbol{j}+2yz^4\boldsymbol{k}$，试求在点$(1,-1,1)$的$\nabla\times\boldsymbol{a}$(即 curl$\boldsymbol{a}$)。

解：
$$\nabla\times\boldsymbol{a}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\times(xz^3\boldsymbol{i}-2x^2yz\boldsymbol{j}+2yz^4\boldsymbol{k})$$
$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xz^3 & -2x^2yz & 2yz^4\end{vmatrix}$$
$$=\left[\frac{\partial}{\partial y}(2yz^4)-\frac{\partial}{\partial z}(-2x^2yz)\right]\boldsymbol{i}+\left[\frac{\partial}{\partial z}(xz^3)-\frac{\partial}{\partial x}(2yz^4)\right]\boldsymbol{j}+\left[\frac{\partial}{\partial x}(-2x^2yz)+\frac{\partial}{\partial y}(xz^3)\right]\boldsymbol{k}$$
$$=(2z^4+2x^2y)\boldsymbol{i}+3xz^2\boldsymbol{j}-4xyz\boldsymbol{k}$$

在点$(1,-1,1)$ $\nabla\times\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$

2.46　设$\boldsymbol{a}=2xz^2\boldsymbol{i}-yz\boldsymbol{j}+3xz^3\boldsymbol{k}$，$\Phi=x^2yz$，试求在点$(1,-1,1)$处的：(i) $\nabla\times\boldsymbol{a}$，(ii) curl$(\Phi\boldsymbol{a})$，(iii) $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})$，(iv) $\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\text{curl}\boldsymbol{a})$，(v) curl grad$(\Phi\boldsymbol{a})$。

答：(i) $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，(ii) $5\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，(iii) $5\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$，(iv) $-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$，(v) $\boldsymbol{0}$。

2.47　设$\nabla\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，试求$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})$。

解：设$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ x & y & z\end{vmatrix}$$
$$=(za_2-ya_3)\boldsymbol{i}+(xa_3-za_1)\boldsymbol{j}+(ya_1-xa_2)\boldsymbol{k}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=\frac{\partial}{\partial x}(za_2-ya_3)+\frac{\partial}{\partial y}(xa_3-za_1)+\frac{\partial}{\partial z}(ya_1-xa_2)$$

$$=z\frac{\partial a_2}{\partial x}-y\frac{\partial a_3}{\partial x}+x\frac{\partial a_3}{\partial y}-z\frac{\partial a_1}{\partial y}+y\frac{\partial a_1}{\partial z}-x\frac{\partial a_2}{\partial z}$$

$$=x\left(\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial z}\right)+y\left(\frac{\partial a_1}{\partial z}-\frac{\partial a_3}{\partial x}\right)+z\left(\frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial a_1}{\partial y}\right)$$

$$=(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\cdot\left[\left(\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_1}{\partial z}-\frac{\partial a_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial a_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]$$

$$=\boldsymbol{r}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})$$

若 $\nabla\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,则 $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=\boldsymbol{r}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0$

2.48　试求 $\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\right)$。

答:0。

2.49　试证:(i) $\nabla\times(\nabla\Phi)=\boldsymbol{0}$,(ii) $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0$。

证:(i) $\nabla\times(\nabla\Phi)=\nabla\times\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial\Phi}{\partial x} & \frac{\partial\Phi}{\partial y} & \frac{\partial\Phi}{\partial z}\end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\right]\boldsymbol{i}+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right]\boldsymbol{j}+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right]\boldsymbol{k}$$

$$=\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial y}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}\right)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$$

(ii) $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=\nabla\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}$

$$=\nabla\cdot\left[\left(\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_1}{\partial z}-\frac{\partial a_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial a_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_1}{\partial z}-\frac{\partial a_3}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial a_1}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 a_3}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 a_2}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 a_1}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 a_3}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 a_2}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 a_1}{\partial z\partial y}=0$$

上面的证明过程中，假设 Φ、$\boldsymbol{a}$ 都存在二阶偏导数。

由以上证明可以推得 $(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c}m)=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c})m=\boldsymbol{0}$，式中 m 是纯量，$\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=0$。

2.50　设 $\boldsymbol{a}=yz^2\boldsymbol{i}-3xy^2\boldsymbol{j}+2xyz\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=3x\boldsymbol{i}+4z\boldsymbol{j}-xy\boldsymbol{k}$，$\Phi=xyz$，试求：(i) $\boldsymbol{a}\times(\nabla\Phi)$，(ii) $(\boldsymbol{a}\times\nabla)\Phi$，(iii) $(\nabla\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$，(iv) $\boldsymbol{b}\cdot\nabla\times\boldsymbol{a}$。

答：(i) $-5x^2yz^2\boldsymbol{i}+xy^2z^2\boldsymbol{j}+4xyz^3\boldsymbol{k}$，(ii) 与 (i) 同，(iii) $16z^3\boldsymbol{i}+(8x^2yz-12xz^2)\boldsymbol{j}+32xz^2\boldsymbol{k}$，(iv) $24x^2z+4xyz^2$。

2.51　设 $f(r)$ 可导，试求 $\mathrm{curl}(\boldsymbol{r}f(r))$。

证：$\mathrm{curl}(\boldsymbol{r}f(r))=\nabla\times(\boldsymbol{r}f(r))$

$$=\nabla\times[xf(r)\boldsymbol{i}+yf(r)\boldsymbol{j}+zf(r)\boldsymbol{k}]$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xf(r) & yf(r) & zf(r)\end{vmatrix}$$

$$=\left(z\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(x\frac{\partial f}{\partial z}-z\frac{\partial f}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

但　$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{f'(r)x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{f'x}{r},$$

同理　$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{f'y}{r},\ \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{f'z}{r},$$

所以　$$\mathrm{curl}(\boldsymbol{r}f(r))=\left(z\frac{f'y}{r}-y\frac{f'z}{r}\right)\boldsymbol{i}+\left(x\frac{f'z}{r}-z\frac{f'x}{r}\right)\boldsymbol{j}+\left(y\frac{f'x}{r}-x\frac{f'y}{r}\right)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$$

2.52　试证 $(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}=\frac{1}{2}\nabla v^2-\boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{V})$。

2.53　试证 $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})=-\nabla^2\boldsymbol{a}+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})$。

证：以 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\nabla$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{F}$ 代入式(1.37)，则

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{F})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F})-(\nabla\cdot\nabla)\boldsymbol{F}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F})-\nabla^2\boldsymbol{F}$$

注意，以算子代的 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 应在 $\boldsymbol{c}$ 之前，否则式(1.37)不能直接利用。

此题也可用直接展开法证明。

2.55 设 $\boldsymbol{V}=\omega\times\boldsymbol{r}$，$\omega$ 是常矢，试证 $\omega=\frac{1}{2}\mathrm{curl}\boldsymbol{V}$。

证：$\mathrm{curl}\boldsymbol{V}=\nabla\times\boldsymbol{V}=\nabla\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3\\ x & y & z\end{vmatrix}$

$$=\nabla\times[(\omega_2 z-\omega_3 y)\boldsymbol{i}+(\omega_3 x-\omega_1 z)\boldsymbol{j}+(\omega_1 y-\omega_2 x)\boldsymbol{k}]$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \omega_2 z-\omega_3 y & \omega_3 x-\omega_1 z & \omega_1 y-\omega_2 x\end{vmatrix}$$

$$=2(\omega_1\boldsymbol{i}+\omega_2\boldsymbol{j}+\omega_3\boldsymbol{k})=2\omega$$

于是
$$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\nabla\times\boldsymbol{V}=\frac{1}{2}\mathrm{curl}\boldsymbol{r}$$

2.57 设 $\Phi(x,y,z)$ 对于轴的旋转是一纯量不变量，试证 $\mathrm{grad}\Phi$ 在这种变换下是一矢量不变量。

证：根据假设 $\Phi(x,y,z)=\overline{\Phi}(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$，所要证明的是

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{k}=\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{x}}\overline{\boldsymbol{i}}+\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{y}}\overline{\boldsymbol{j}}+\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{z}}\overline{\boldsymbol{k}}$$

因为
$$\overline{x}=\alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13}z$$
$$\overline{y}=\alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\alpha_{23}z$$
$$\overline{z}=\alpha_{31}x+\alpha_{32}y+\alpha_{33}z$$

利用链式规则，有

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{x}}\frac{\partial\overline{x}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{y}}\frac{\partial\overline{y}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\overline{z}}{\partial x}=\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{x}}\alpha_{11}+\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{y}}\alpha_{21}+\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{z}}\alpha_{31}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{x}}\frac{\partial\overline{x}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{y}}\frac{\partial\overline{y}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\overline{z}}{\partial y}=\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{x}}\alpha_{12}+\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{y}}\alpha_{22}+\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{z}}\alpha_{32}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{x}}\frac{\partial\overline{x}}{\partial z}+\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{y}}\frac{\partial\overline{y}}{\partial z}+\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\overline{z}}{\partial z}=\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{x}}\alpha_{13}+\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{y}}\alpha_{23}+\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{z}}\alpha_{33}$$

将上面三式分别乘以 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，再相加，应用式(2.57)即可得所证的

结果。

2.59　设 $\boldsymbol{a}=(3x^2+6y)\boldsymbol{i}-14yz\boldsymbol{j}+20xz^2\boldsymbol{k}$，试求从点(0,0,0)到点(1,1,1)的积分 $\int_C \boldsymbol{a},\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，沿的路径 C 是：(i) $x=t, y=t^2, z=t^3$；(ii)直线从点(0,0,0)到点(1,0,0)，再到点(1,1,0)，最后到点(1,1,1)；(iii)点(0,0,0)到点(1,1,1)连成的直线。

解：

$$\int_C \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_C[(3x^2+6y)\boldsymbol{i}-14yz\boldsymbol{j}+20xz^2\boldsymbol{k}]\cdot(\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k})$$

$$=\int_C(3x^2+6y)\mathrm{d}x-14yz\mathrm{d}y+20xz^2\mathrm{d}z$$

(i)若 $x=t, y=t^2, z=t^3$，点(0,0,0)、(1,1,1)对应于 $t=0, t=1$，所以 $\int_{t=0}^{1}(9t^2-28t^6+60t^9)\mathrm{d}t$

$$=3t^3-4t^7+6t^{10}\Big|_0^1=5$$

(ii)沿直线从(0,0,0)到(1,0,0)，$y=0, z=0, \mathrm{d}y=0, \mathrm{d}z=0$，而 x 由0变到1，于是沿这一部分路径的积分

$$\int_C \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_0^1(3x^2+6(0))\mathrm{d}x-14(0)(0)(0)+20x(0)^2(0)$$

$$=x^3\Big|_0^1=1$$

从点(1,0,0)到点(1,1,0)，$x=1, z=0, \mathrm{d}x=0, \mathrm{d}z=0$ 而 y 由0变到1，

$$\int_0^1(3(1)^2+6y)0-14y(0)\mathrm{d}y+20(1)(0)^2 0=0$$

从点(1,1,0)到点(1,1,1)，$x=1, y=1, \mathrm{d}x=0, \mathrm{d}y=0$ 而 z 由0变到1，

$$\int_0^1 20z^2\mathrm{d}z=\frac{20}{3}$$

所以

$$\int_C \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=1+0+\frac{20}{3}=\frac{23}{3}$$

(iii)点(0,0,0)到点(1,1,1)的直线参数方程为 $x=t, y=t, z$

$=t$，所以

$$\int_C \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_0^1 (3t^2+6t)\mathrm{d}t-14(t)(t)\mathrm{d}t+20(t)(t)^2\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1 (6t-11t^2+20t^3)\mathrm{d}t=\frac{13}{3}$$

2.60　设 $\boldsymbol{a}=(2y+3)\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+(yz-x)\boldsymbol{k}$，试求积分 $\int_C \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，沿的路径 C 及其始、终点如下：(i) $x=2t^2, y=t, z=t^3$，从 $t=0$ 到 $t=1$；(ii)直线从点(0,0,0)到点(0,0,1)，再到点(0,1,1)，最后到点(2,1,1)；(iii)点(0,0,0)到点(2,1,1)连成的直线。

答：(i) 288/35，(ii) 10，(iii) 8。

2.61　(i)若 $\boldsymbol{F}=\nabla\Phi$，式中 Φ 是单值连续函数，且其偏导数存在，试证明在该场中，力 $\boldsymbol{F}$ 做的功与两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$、$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 联接的路径无关；(ii)反之，$\int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 与两点联接的路径无关，证明函数 Φ 恰好满足 $\boldsymbol{F}=\nabla\Phi$。

证：

(i)　力的功 $=\int_{P_1}^{P_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{P_1}^{P_2}\nabla\Phi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$

$$=\int_{P_1}^{P_2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k})$$

$$=\int_{P_1}^{P_2}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$=\int_{P_1}^{P_2}\mathrm{d}\Phi=\Phi(P_2)-\Phi(P_1)$$

$$=\Phi(x_2,y_2,z_2)-\Phi(x_1,y_1,z_1)$$

这就证明了，若 $\Phi(x,y,z)$ 对于所有的 P_1、P_2 点都是单值连续函数，上述积分仅与 P_1、P_2 两点有关，而与路径无关。

(ii)　若 $\int_{P_1}^{P_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 与联接 P_1、P_2 的曲线 C 无关，$\boldsymbol{F}$ 称为保守场。

$$\Phi(x,y,z)=\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x,y,z)}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x,y,z)}\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s$$

将等式进行微分得 $\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s}=\boldsymbol{F}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$

但 $\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s}=\nabla\Phi\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$ 于是 $(\nabla\Phi-\boldsymbol{F})\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=0$

因为要保持$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$的独立性，所以有 $\boldsymbol{F}=\nabla\Phi$。

2.62 设 xy 平面内的封闭曲线为 $x=2\cos t, y=3\sin t, \boldsymbol{F}=(x-3y)\boldsymbol{i}+(y-2x)\boldsymbol{j}$，试计算从 $t=0$到 $t=2\pi$ 的积分 $\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$。

答：6π（C 沿反时针方向转）。

2.63 (i)若 $\boldsymbol{F}$ 是保守场，试证 $\mathrm{curl}\boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$（即无旋场），(ii)反之，若 $\nabla\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$，证明 $\boldsymbol{F}$ 是保守场。

证：

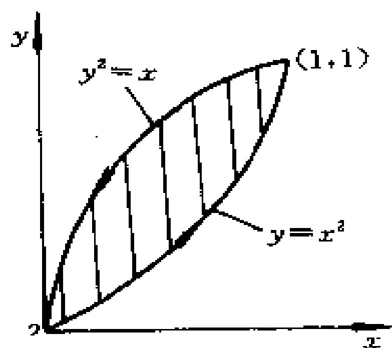
(i)若 $\boldsymbol{F}$ 是保守场，根据题2.61知 $\boldsymbol{F}=\nabla\Phi$，根据题2.49(i)可知 $\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{F}=\nabla\times\nabla\Phi=\boldsymbol{0}$

(ii)由读者证明。

提示：若 $\nabla\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$，则$\dfrac{\partial F_3}{\partial y}=\dfrac{\partial F_2}{\partial z},\dfrac{\partial F_1}{\partial z}=\dfrac{\partial F_3}{\partial x},\dfrac{\partial F_2}{\partial x}=\dfrac{\partial F_1}{\partial y}$，再证$\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}=F_3,\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=F_2,\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=F_1$

$$\boldsymbol{F}=F_1\boldsymbol{i}+F_2\boldsymbol{j}+F_3\boldsymbol{k}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{k}=\nabla\Phi$$

2.64 设 $\boldsymbol{a}=(x-y)\boldsymbol{i}+(x+y)\boldsymbol{j}$，试求沿题2.64图的路径的积分 $\oint_C \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$。



题2.64图

答：2/3。

2.65 设 $\Phi=2xyz^2, \boldsymbol{F}=xy\boldsymbol{i}-z\boldsymbol{j}+x^2\boldsymbol{k}$，路径 C 是曲线 $x=t^2, y=2t, z=t^3$，试求沿此路径从 $t=0$到 $t=1$的下列积分：(i) $\int_C \Phi\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，(ii) $\int_C \boldsymbol{F}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}$。

解：

(i)沿 C，$\Phi=2xyz^2=2(t)^2(2t)(t^3)^2=4t^9$，

$$r=xi+yj+zk=t^2i+2tj+t^3k,$$

$$dr=(2ti+2j+3t^2k)dt$$

$$\int_C \Phi dr=\int_{t=0}^1 4t^9(2ti+2j+3t^2k)dt$$

$$=\frac{8}{11}i+\frac{4}{5}j+k$$

(ii)沿 C，$F=xyi-zj+x^2k=2t^3i-t^3j+t^4k$

$$F\times dr=[(-3t^5-2t^4)i+(2t^5-6t^5)j+(4t^3+2t^4)k]dt$$

$$\int_C F\times dr=i\int_0^1(-3t^5-2t^4)dt+j\int_0^1(-4t^5)dt$$

$$+k\int_0^1(4t^3+2t^4)dt$$

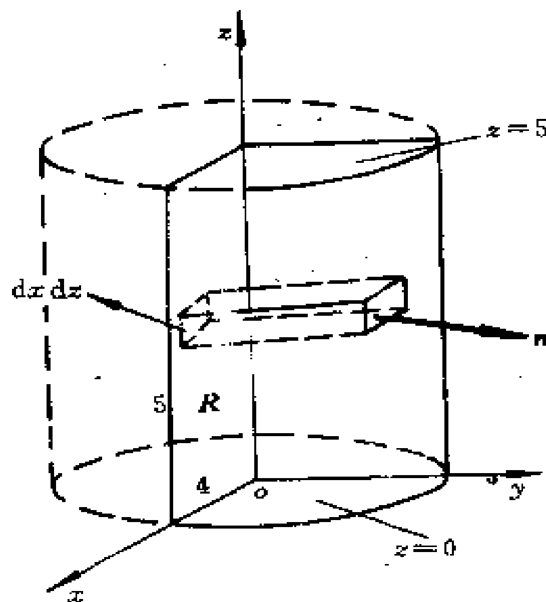
$$=-\frac{9}{10}i-\frac{2}{3}j+\frac{7}{5}k$$

2.66 (i)试证 $F(y^2\cos x+z^3)i+(2y\sin x-4)j+(3xz^2+2)k$ 是保守力场；(ii)求出 F 的势(纯量)；(iii)求从点(0,1,−1)到点($\pi/2$,−1,2) F 力做的功。

答：(ii)$\Phi=y^2\sin x+xz^3-4y+2z+C$，(iii) $15+4\pi$。

2.67 计算 $\iint_S a\cdot n ds$，式中 $a=zi+xj-3y^2zk$，S 是从 $z=0$到 $z=5$、第一象限 $x^2+y^2=16$的圆柱表面。

解：S 在 xz 面内的投影记作 R(见题2.67图)。



题2.67图

$$\iint_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \iint_R \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}z}{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j}|}$$

$x^2+y^2=16$的法线$\nabla(x^2+y^2)=2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}$，$S$ 的法线单位矢量

$$\boldsymbol{n}=\frac{2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}}{\sqrt{(2x)^2+(2y)^2}}=\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}}{4}$$

因 S 的表面为 $x^2+y^2=16$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=(z\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}-3y^2z\boldsymbol{k})\cdot\left(\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}}{4}\right)=\frac{1}{4}(xz+xy)$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j}=\left(\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}}{4}\right)\boldsymbol{j}=\frac{y}{4}$$

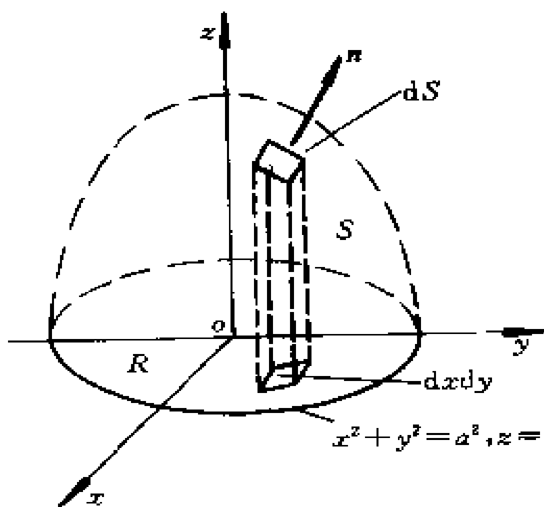
$$\iint_R \frac{xz+xy}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\int_{z=0}^{5}\int_{x=0}^{4}\left(\frac{xz}{\sqrt{16-x^2}}+x\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{z=0}^{5}(4z+8)\mathrm{d}z=80$$

2.68　设 $\boldsymbol{a}=(3x+y)\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}+(y-2)\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，试计算积分 $\oint_C(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}$。积分路径是沿 xy 平面的圆周，圆心在原点，半径为2，反时针方向。

答：$4\pi(7\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j})$。

2.69　设 $\boldsymbol{F}=y\boldsymbol{i}+(x-2xz)\boldsymbol{j}-xy\boldsymbol{k}$，试计算积分 $\iint_S(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$。式中 S 是球 $x^2+y^2+z^2=a^2$在 xy 平面的上部表面。



题2.69图

解：

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & x-2xz & -xy\end{vmatrix}$$
$$=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}-2z\boldsymbol{k}$$

$x^2+y^2+z^2=a^2$的法线

$$\nabla(x^2+y^2+z^2)=2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}$$

法线单位矢量

$$\boldsymbol{n}=\frac{2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}=\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{a}$$

$$\iint_S(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iint_R(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\,\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}|}$$
$$=\iint_R(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}-2z\boldsymbol{k})\cdot\left(\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{a}\right)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z/a}$$
$$=\int_{x=-a}^{a}\int_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{3(x^2+y^2)+a^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

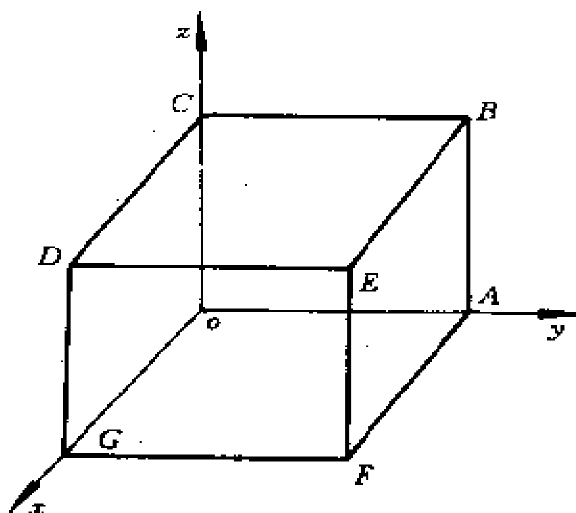
用极坐标 $x=\rho\cos\varphi$、$y=\rho\sin\varphi$，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$，上述积分化为

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{a}\frac{3\rho^2-2a^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{a}\frac{3(\rho^2-a^2)+a^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$
$$=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{a}\left(-3\rho\sqrt{a^2-\rho^2}+\frac{a^2\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\right)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$
$$=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left[(a^2-\rho^2)^{3/2}-a^2\sqrt{a^2-\rho^2}\,\Big|_{\rho=0}^{a}\right]\mathrm{d}\varphi$$
$$=\int_{\varphi=0}^{2\pi}(a^3-a^3)\mathrm{d}\varphi=0$$

2.70　计算下列两种情况下的积分 $\iint_S\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$，(i) $\boldsymbol{a}=y\boldsymbol{i}+2x\boldsymbol{j}-z\boldsymbol{k}$，$S$ 是第一象限内 $2x+y=6$ 平面，其顶部被 $z=4$ 平面所切的表面；(ii) $\boldsymbol{a}=(x+y^2)\boldsymbol{i}-2x\boldsymbol{j}+2yz\boldsymbol{k}$ s 是第一象限内 $2x+y+2z=6$ 平面的表面。

答：(i)108，(ii) 81。

2.71　设 $\boldsymbol{F}=4xz\boldsymbol{i}-y^2\boldsymbol{j}+yz\boldsymbol{k}$，试计算 $\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$。$S$ 是一立方体的表面，其边界为 $x=0,x=1;y=0,y=1;z=0,z=1$。



题2.71图

解：

$DEFG$ 面：$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i},x=1$，则

$$\iint_{DEFG}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\int_0^1\int_0^1(4z\boldsymbol{i}-y^2\boldsymbol{j}+yz\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{i}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1\int_0^1 4z\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2$$

$ABCO$ 面：$\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{i},x=0$，则

$$\iint_{ABCO}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\int_0^1\int_0^1(-y^2\boldsymbol{j}+yz\boldsymbol{k})\cdot(-\boldsymbol{i})\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=0$$

同理可算得：

$$\iint_{ABEF}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=-1,\quad\iint_{OGDC}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0,$$

$$\iint_{BCDE}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\frac{1}{2},\quad\iint_{AFGO}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0,$$

总和：$\iint_S\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=2+0+(-1)+0+\frac{1}{2}+0=\frac{3}{2}$

2.72　设 $\boldsymbol{F}=(x+2y)\boldsymbol{i}-3z\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k}$，$\Phi=4x+3y-2z$，试计算 (i) $\iint_S(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$，(ii) $\iint_S\Phi\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$。$S$ 是 $2x+y+2z=6$ 平面，其边界为 $x=0,x=1;y=0,y=2$。

答：(i) 1，(ii) $2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$。

2.73　计算$\int_{(0,0)}^{(2,1)}(10x^4-2xy^3)\mathrm{d}x-3x^2y^2\mathrm{d}y$，沿的路径是 $x^4-6xy^3=4y^2$。

解：方法一：$M=10x^4-2xy^3$，$N=-3x^2y^2$，$\dfrac{\partial M}{\partial y}=-6xy^2=\dfrac{\partial N}{\partial x}$，所以与积分路径无关。我们可沿任何路径积分，例如取点(0，0)到点(2，0)与点(2，0)到点(2，1)两条直线。

从点(0，0)到点(2，0)的直线，$y=0$，$\mathrm{d}y=0$，积分为

$$\int_{x=0}^{2}10x^4\mathrm{d}x=64$$

从点(2，0)到点(2，1)的直线，$x=2$，$\mathrm{d}x=0$，积分为

$$\int_{y=0}^{1}-12y^2\mathrm{d}y=-4$$

总的积分为$\int_{(0,0)}^{(2,1)}(10x^4-2xy^3)\mathrm{d}x-3x^2y^2\mathrm{d}y=64-4=60$

方法二

因$\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$，而$(10x^4-2xy^3)\mathrm{d}x-3x^2y^2\mathrm{d}y$ 是$2x^5-x^2y^3$的全微分，所以

$$\int_{(0,0)}^{(2,1)}(10x^4-2xy^3)\mathrm{d}x-3x^2y^2\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(2,1)}\mathrm{d}(2x^5-x^2y^3)$$

$$=(2x^5-x^2y^3)\Big|_{(0,0)}^{(2,1)}=60$$

2.74　计算$\int_{(0,0)}^{(\pi,2)}(6xy-y^2)\mathrm{d}x+(3x^2-2xy)\mathrm{d}y$，沿的路径是摆线 $x=\theta-\sin\theta$，$y=1-\cos\theta$。

答：$6\pi^2-4\pi$。

2.75　试证以曲线 c 单连封闭的图形面积由式$\dfrac{1}{2}\oint_c x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$ 计算。

证：将 $M=-y$，$N=x$ 代入格林公式得

$$\oint_c x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\iint_R\left[\frac{\partial}{\partial x}(x)-\frac{\partial}{\partial y}(-y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2A$$

式中 A 就是所求的面积，因此 $A=\frac{1}{2}\oint_c x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$

2.76　计算椭圆 $x=a\cos\theta, y=b\sin\theta$ 的面积。

答：πab。

2.77　试证在单连通域里当且仅当处处都有 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$，则曲线 c 为封闭边界时 $\oint_c M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y=0$。

证：

假设 M、N 在以曲线 c 为边界的域 R 中处处都连续并有偏导数，则可用格林定理。

$$\oint_c M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

若在 R 里 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$，显然 $\oint_c M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y=0$

反之，设对所有的曲线 c 有 $\oint_c M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y=0$。若 $\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}>0$（在某一点 P），由导数的连续性，在 P 周围的域 A 里也有 $\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}>0$，若域 A 的边界为 Γ，则

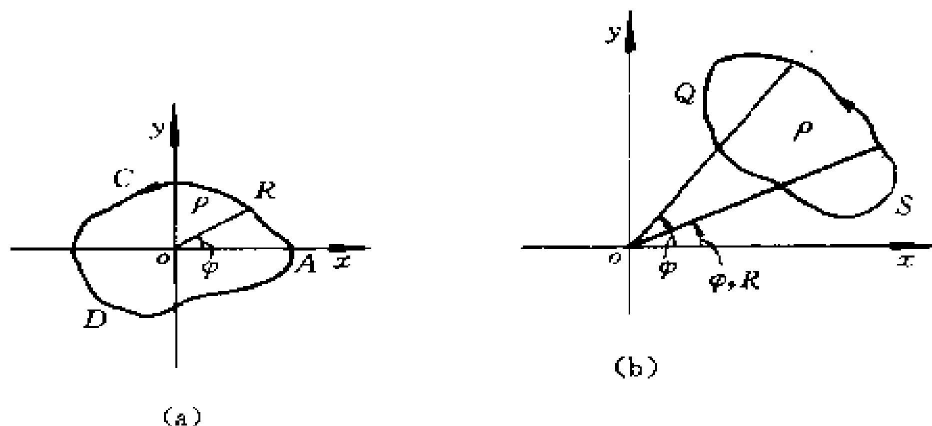
$$\oint_\Gamma M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = \iint_A \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0$$

这与环绕任何封闭曲线积分为零的假设矛盾。同理 $\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}<0$ 也是不成立的。所以对所有的点都有 $\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=0$。

2.78　设 $\boldsymbol{F}=\frac{-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}}{x^2+y^2}$，(i)求 $\nabla\times\boldsymbol{F}$，(ii)计算沿任意封闭边界的积分 $\oint\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，并解释计算结果。

答：(i)$\mathbf{0}$。

(ii) 设 $x=\rho\cos\varphi$，$y=\rho\sin\varphi$，$\mathrm{d}x=-\rho\sin\varphi\mathrm{d}\varphi+\mathrm{d}\rho\cos\varphi$，$\mathrm{d}y=\rho\cos\varphi\mathrm{d}\varphi+\mathrm{d}\rho\sin\varphi$



题2.78图

$$\oint \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2} = \oint \mathrm{d}\varphi$$

对于图(a) $\oint \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi$

对于图(b) $\oint \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0} \mathrm{d}\varphi = 0$

2.79 设 $\boldsymbol{a} = 4x\boldsymbol{i} - 2y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$，取 $x^2 + y^2 = 4$ 和 $z = 0, z = 3$ 所围的域，验证斯托克斯定理。

证：体积积分

$$\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{a} \mathrm{d}V = \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(4x) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2)\right]\mathrm{d}V$$

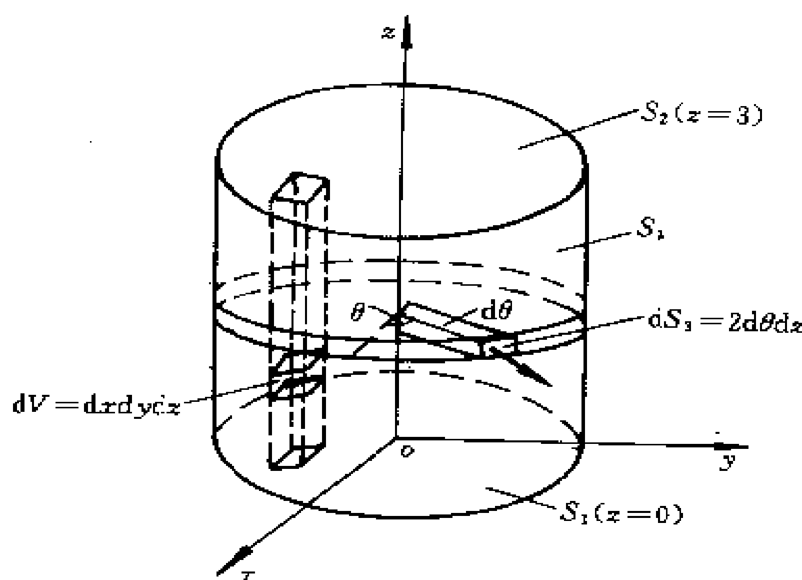
$$= \iiint_V (4 - 4y + 2z)\mathrm{d}V$$

$$= \int_{x=-2}^{2} \int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}} \int_{z=0}^{3} (4 - 4y + 2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 84\pi$$

将整个表面 S 划分为：底面 $S_1(z=0)$、顶面 $S_2(z=3)$ 和柱筒表面 $S_3(x^2+y^2=4)$，则面积分

$$\iint_S \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \iint_{S_1} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S_1 + \iint_{S_2} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S_2 + \iint_{S_3} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S_3$$

S_1：$\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{k}, \boldsymbol{a} = 4x\boldsymbol{i} - 2y^2\boldsymbol{j}, \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} = 0$



题2.79图

于是
$$\iint_{S_1} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S_1=0$$

S_2：$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{a}=4x\boldsymbol{i}-2y^2\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=9$

于是
$$\iint_{S_2} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S_2=9\iint_{S_2}\mathrm{d}S_2=36\pi\text{（因 }S_2\text{的面积是}4\pi\text{）}$$

S_3：$x^2+y^2=4$的法线$\nabla(x^2+y^2)=2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}$

$$\boldsymbol{n}=\frac{2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}}{\sqrt{4x^2+4y^2}}=\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}}{2}\text{（因为 }x^2+y^2=4\text{）}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=(4x\boldsymbol{i}-2y^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k})\cdot\left(\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}}{2}\right)=2x^2-y^3$$

由图可知 $x=2\cos\theta$，$y=2\sin\theta$，$\mathrm{d}S_3=2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$

于是
$$\iint_{S_3}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S_3=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{3}[2(2\cos\theta)^2-(2\sin\theta)^3]2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=\int_{\theta=0}^{2\pi}(48\cos^2\theta-48\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta=\int_{\theta=0}^{2\pi}48\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=48\pi$$

总的面积分
$$\iint_S\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0+36\pi+48\pi=84\pi$$

2.80　计算 $\iint\limits_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$，式中 $\boldsymbol{F}=4xz\boldsymbol{i}-y^2\boldsymbol{j}+yz\boldsymbol{k}$，$S$ 是以 $x=0,x=1;y=0,y=1;z=0,z=1$为边界的立方体表面。

解：根据散度定理，所求的积分为

$$\iiint\limits_V \nabla\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}V=\iiint\limits_V\left[\frac{\partial}{\partial x}(4xz)+\frac{\partial}{\partial y}(-y^2)+\frac{\partial}{\partial z}(yz)\right]\mathrm{d}V$$

$$=\iiint\limits_V(4z-y)\mathrm{d}V=\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1}(4z-y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$=\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}2z^2-yz\Big|_0^1\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$=\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}(2-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$$

与题2.71用面积分算出的结果相同。

2.81　计算 $\oint\limits_S \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$，式中 S 是封闭曲面。

解：根据散度定理

$$\oint\limits_S \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint\limits_V\nabla\cdot\boldsymbol{r}\mathrm{d}V=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\mathrm{d}V$$

$$=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=3\iiint\limits_V\mathrm{d}V=3V$$

式中 V 是 S 所包容的体积。

2.82　试证 $\iiint\limits_V(\Phi\nabla^2\Psi-\Psi\nabla^2\Phi)\mathrm{d}V=\iint\limits_S(\Phi\nabla\Psi-\Psi\nabla\Phi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$

提示：设 $\boldsymbol{a}=\Phi\nabla\Psi$ 代入散度定理的公式。

2.83　试证 $\iiint\limits_V\nabla\Phi\mathrm{d}V=\iint\limits_S\Phi\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$。

证：令 $\boldsymbol{a}=\Phi\boldsymbol{C}$（$\boldsymbol{C}$ 是常矢）代入散度定理的公式，

则 $\iiint\limits_V\nabla\cdot(\Phi\boldsymbol{C})\mathrm{d}V=\iint\limits_S\Phi\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$

因为　$\nabla\cdot(\Phi\boldsymbol{C})=(\nabla\Phi)\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}\cdot\nabla\Phi,\ \Phi\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{C}\cdot(\Phi\boldsymbol{n})$

$$\iiint\limits_V\boldsymbol{C}\cdot\nabla\Phi\mathrm{d}V=\boldsymbol{C}\cdot\iint\limits_S\Phi\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

因 $\boldsymbol{C}$ 是任意常矢，所以

$$\iiint_V \nabla \Phi \mathrm{d}V = \iint_S \Phi \boldsymbol{n} \mathrm{d}S$$

2.84　试证 $\iiint_V \nabla \times \boldsymbol{b} \mathrm{d}V = \iint_S \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{b} \mathrm{d}S$

提示：令 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$（$\boldsymbol{c}$ 为常矢）代人散度定理的公式。

2.85　设 S 是一闭曲面，$\boldsymbol{r}$ 是任一点 $P(x, y, z)$ 从原点 o 量起的位矢。试证明(i)若原点 o 在 S 的外边，积分 $\iint_S \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3} \mathrm{d}S$ 为0；(ii)若原点 o 在 S 的内部积分 $\iint_S \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3} \mathrm{d}S$ 为 4π。

证：(i)根据散度定理 $\iint_S \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3} \mathrm{d}S = \iiint_V \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \mathrm{d}V$，题 2.41 已证 $\nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \right) = 0$，若原点 o 在 $S(V)$ 的外边，则 V 中的处处都是 $r \neq 0$，所以 $\iint_S \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3} \mathrm{d}S = 0$。

(ii)若原点 o 在 S 内部，围绕 o 以半径 a 作一小球 s。令 τ 表示由 S 和 s 围成的域，根据散度定理

$$\iint_{S+s} \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3} \mathrm{d}S = \iint_S \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3} \mathrm{d}S + \iint_s \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3} \mathrm{d}S = \iint_\tau \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \mathrm{d}V = 0$$

因为在 τ 域 $r \neq 0$，于是

$$\iint_S \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3} \mathrm{d}S = -\iint_s \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3} \mathrm{d}S$$

在 S 上 $r = a$，$\boldsymbol{n} = -\frac{\boldsymbol{r}}{a}$，于是

$$\frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{(-\boldsymbol{r}/a) \cdot \boldsymbol{r}}{a^3} = -\frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}}{a^4} = -\frac{a^2}{a^4} = -\frac{1}{a^2}$$

$$\iint_S \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3} \mathrm{d}S = -\iint_S \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3} \mathrm{d}S = \iint_S \frac{1}{a^2} \mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{a^2} \iint_S \mathrm{d}S = \frac{4\pi a^2}{a^2} = 4\pi$$

2.86　试证 $\oint \mathrm{d}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{b} = \iint_S (\boldsymbol{n} \times \nabla) \times \boldsymbol{b} \mathrm{d}S$

提示：令 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$（$\boldsymbol{c}$ 是常矢）代入斯托克斯定理的公式。

第三章　矩　　阵

3.1　如果 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 1 & -5\\ 4 & 3\end{pmatrix}$，求 $D=\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\\ t & u\end{pmatrix}$，使得 $A+B-D=0$

解：$A+B-D=\begin{pmatrix}1-3-p & 2-2-q\\ 3+1-r & 4-5-s\\ 5+4-t & 6+3-u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-p & -q\\ 4-r & -1-r\\ 9-t & 9-u\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

故得
$$D=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 4 & -1\\ 9 & 9\end{pmatrix}$$

3.2　设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 5 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}$，

$$C=\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix},$$

计算 (i) $A+B$，(ii) $A-C$，(iii) $-2A$。

答：(i) $\begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\ 9 & 2 & 7\\ 3 & -1 & 4\end{pmatrix}$，(ii) $\begin{pmatrix}-3 & 1 & -5\\ 5 & -3 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$，

(iii) $\begin{pmatrix}-2 & -4 & 6\\ -10 & 0 & -4\\ -2 & 2 & -2\end{pmatrix}$

3.3 设 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$求 A^3。

解：$A^2=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -3 & 1\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}5 & -3 & 1\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & -8 & 0\\ 8 & -1 & 8\\ 8 & -4 & 3\end{pmatrix}$$

3.4 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -3 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$，计算 AB，BA。

解：$AB=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -3 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}=0$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -3 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & 6 & -1\\ -22 & 12 & -2\\ -11 & 6 & -1\end{pmatrix}$$

可见，一般 $AB\neq BA$。

3.5 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，

$C=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 1+i\end{pmatrix}$，计算(i)$AB$，(ii)$C^TA$。

解：(i)$AB=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$

(ii)$C^TA=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -2\\ 1 & 1+i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}=$

$$\begin{pmatrix} 2\times1+1\times(-1) & 2\times0+1\times2 & 2\times0+1\times2 \\ (-1)\times1+(-2)(-1) & (-1)\times0+(-2)\times2 & (-1)(-2)+(-2)\times1 \\ 1\times1+(1+i)(-1) & 1\times0+(1+i)\times2 & 1\times(-2)+(1+i)\times1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -i & 2+2i & -1+i \end{pmatrix}$$

3.6　设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ -1 & 2-i & 2 \end{pmatrix}$，

$C=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，计算(i)$2A+C$，(ii)$B^TC$，(iii)$AC$，(iv)$CA$。

答：(i) $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$，(ii) $\begin{pmatrix} -1-i & 1+3i \\ 1-i & 1+i \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$，(iii) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$，

(iv) $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

3.7　求下列矩阵 X。

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}+X=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$，

(ii) $2\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}-3X+\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}=0$

解：(i) $X=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

(ii) $3X=2\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4/3 & -1 & 1 \\ -1/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$

3.8　求矩阵 X，

$$2X+\begin{pmatrix}3 & -1\\2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}$$

答：$X=\begin{pmatrix}-5/2 & 1/2\\-1/2 & 1/2\end{pmatrix}$

3.9　设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times p}$，$C=(c_{ij})_{n\times p}$，试证 $A(B+C)=AB+AC$。

证：矩阵 A 的第 i 行的元素为 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$。矩阵 $B+C$ 的第 j 列的元素为 $b_{1j}+c_{1j},b_{2j}+c_{2j},\cdots,b_{nj}+c_{nj}$。$A(B+C)$ 的第 i 行第 j 列的元素为 $a_{i1}(b_{1j}+c_{1j})+a_{i2}(b_{2j}+c_{2j})+\cdots+a_{in}(b_{nj}+c_{nj})=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj}$。这两项正是矩阵 AB 与 AC 的第 i 行第 j 列的元素。

3.10　对于两个矩阵 A、B，求使得 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 成立的条件。

答：A、B 是可交换的，即 $AB=BA$。

3.11　设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times p}$，$C=(c_{ij})_{p\times q}$，试证 $A(BC)=(AB)C$。

证　A 的第 i 行的元素为 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$，$BC$ 的第 j 列的元素为 $\sum_{h=1}^{p}b_{1h}c_{hj},\sum_{h=1}^{p}b_{2h}c_{hj},\cdots,\sum_{h=1}^{p}b_{nh}c_{hj}$。因此，$A(BC)$ 第 i 行第 j 列的元素为

$$a_{i1}\sum_{h=1}^{p}b_{1h}c_{hj}+a_{i2}\sum_{h=1}^{p}b_{2h}c_{hj}+\cdots+a_{in}\sum_{h=1}^{p}b_{nh}c_{hj}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\Big(\sum_{h=1}^{p}b_{kh}c_{hj}\Big)=\sum_{h=1}^{p}\Big(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kh}\Big)C_{hj}$$

$$=\Big(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{k1}\Big)c_{1j}+\Big(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{k2}\Big)c_{2j}+\cdots+\Big(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kp}\Big)c_{pj}$$

等式表明，这就是 $(AB)C$ 第 i 行第 j 列的元素。所以，$A(BC)=(AB)C$。

3.12　设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times p$ 矩阵，$cr\times q$ 矩阵。问 p，

q, r 应满足什么条件才能进行下列运算?运算结果的阶次是多少?(i)ABC,(ii)ACB,(iii)$A(B+C)$?

答:(i)$p=r, m\times q$;(ii)$r=n=q$,$m\times p$;(iii)$r=n, p=q, m\times q$。

3.13 试证方阵可唯一地表为对称矩阵与反对称矩阵之和。

证:设 $B=\frac{1}{2}(A+A^T)$,$C=\frac{1}{2}(A-A^T)$,则 $A=B+C$

$$B^T=\left[\frac{1}{2}(A+A^T)\right]^T=\frac{1}{2}(A+A^T)^T$$

$$=\frac{1}{2}[A^T+(A^T)^T]=\frac{1}{2}(A+A^T)=B$$

$$C^T=\left[\frac{1}{2}(A-A^T)\right]^T=\frac{1}{2}(A-A^T)^T$$

$$=\frac{1}{2}[A^T-(A^T)^T]=\frac{1}{2}(A^T-A)=-C$$

即,B 是对称矩阵,C 是反对称矩阵,所以,方阵 A 表成对称矩阵与反对称矩阵之和。

再则,设 $B_1^T=B_1, C_1^T=-C_1$,并令 $A=B_1+C_1$,则

$$A^T=(B_1+C_1)^T=B_1^T+C_1^T=B_1-C_1$$

故有
$$A+A^T=2B_1,\quad A-A^T=2C_1$$

即
$$B_1=\frac{A+A^T}{2}=B,\quad C_1=\frac{A-A^T}{2}=C$$

3.14 将 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&0&1\\-2&2&3\end{pmatrix}$ 表为对称矩阵与反对称矩阵之和。

答:$\begin{pmatrix}1&5/2&-3/2\\5/2&0&3/2\\-3/2&3/2&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1/2&1/2\\1/2&0&-1/2\\-1/2&1/2&0\end{pmatrix}$

3.15 设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 的列矢量为 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 时,试用 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 表示 A^TA。

解：由于 $A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$，$\boldsymbol{a}_i=\begin{pmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\\vdots\\a_{ni}\end{pmatrix}$，

$$A^T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_i^T=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})$$

从而

$$A^T=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1^T\\\boldsymbol{a}_2^T\\\vdots\\\boldsymbol{a}_n^T\end{pmatrix}$$

根据乘法规则，有

$$A^TA=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1^T\\\boldsymbol{a}_2^T\\\vdots\\\boldsymbol{a}_n^T\end{pmatrix}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_n\\\boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_n\\\vdots & \vdots & & \vdots\\\boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}$$

3.16　设 n 阶矩阵 A 的行矢量为 $\boldsymbol{a}^{(1)},\boldsymbol{a}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{a}^{(n)}$ 时，试用 $\boldsymbol{a}^{(1)},\boldsymbol{a}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{a}^{(n)}$ 表示 $A^TA=I$ 成立的条件。

答：$\boldsymbol{a}^{(i)T}\boldsymbol{a}^{(j)}=\delta_{ij}$，即 $\boldsymbol{a}^{(i)T}\boldsymbol{a}^{(j)}=\begin{cases}1 & (i=j)\\0 & (i\neq 0)\end{cases}$

3.17　A、B 为对称矩阵时，试证 $AB+BA$ 为对称矩阵，$AB-BA$ 为反对称矩阵。

证：　因为 A、B 是对称矩阵，所以 $A^T=A,B^T=B$。

$(AB+BA)^T=(AB)^T+(BA)^T=B^TA^T+A^TB^T=BA+AB=AB+BA$

可见，$AB+BA$ 是对称矩阵。

$(AB-BA)^T=(AB)^T-(BA)^T=B^TA^T-A^TB^T=BA-AB=-(AB-BA)$

可见，$AB-BA$ 是反对称矩阵。

3.18　A 为对称矩阵，B 为反对称矩阵，求 AB 为反对称矩阵的条件。

答：A、B 可交换是 AB 为反对称矩阵的必要与充分条件。

3.19　A、B 为同阶方阵，定义矩阵的迹 $\mathrm{tr}A=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$，

求证 $\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}A+\mathrm{tr}B$。

证：设 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，$A+B=(a_{ij}+b_{ij})$，

从而

$$\mathrm{tr}(A+B)=\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}+\sum_{i=1}^{n}b_{ii}$$
$$=\mathrm{tr}A+\mathrm{tr}B$$

3.21　如果 $AB=A$，$BA=B$，试证 A 与 B 都是幂等矩阵（即 $A^2=A$）。

证：

$$ABA=(AB)A=AA=A^2$$

又

$$ABA=A(BA)=AB=A$$

所以，$A^2=A$。用 BAB 可证 $B^2=B$。

3.23　试证 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{pmatrix}$ 为3阶幂零矩阵（即 $A^3=0$）。

证：

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 9\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 9\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

3.24　若 A 为2阶幂零矩阵，试证 $A(I\pm A)^n=A$，n 为任何正整数。

提示：$A^n=0\ (n>1)$

3.26　若 A 为有逆阵的 n 阶方阵，试证：(i) $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$；(ii) $(\overline{A})^{-1}=\overline{A^{-1}}$；(iii) $(\overline{A}^T)^{-1}=\overline{(A^{-1})^T}$。

提示：由 $AA^{-1}=I$ 的转置，得 A^T 的逆阵为 $(A^{-1})^T$。

3.27　计算 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 3 & 3 & 4\end{bmatrix}$ 的逆矩阵。

解：$\det A=2$

$$\operatorname{adj}A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 2\\ 7 & -5 & -4\\ -3 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{\operatorname{adj}A}{\det A}=\begin{bmatrix}-3/2 & 1/2 & 1\\ 7/2 & -5/2 & -2\\ -3/2 & 3/2 & 1\end{bmatrix}$$

3.28　计算下述矩阵的逆矩阵：(i) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$，

(ii) $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$。

答：(i) $\frac{1}{14}\begin{bmatrix}3 & -1 & 5\\ 5 & 3 & -1\\ -1 & 5 & 3\end{bmatrix}$，(ii) $\begin{bmatrix}1 & -2/3 & 0 & 0\\ 0 & 1/3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & -1/6\\ 0 & 0 & 0 & 1/3\end{bmatrix}$

3.29　若 A、B 是可交换的非奇异矩阵，试证下述矩阵是可交换的。(i) A^{-1} 与 B，(ii) A^{-1} 与 B^{-1}。

证：(i)因为 $AB=BA$，所以 $A^{-1}(AB)A^{-1}=A^{-1}(BA)A^{-1}$

$$(A^{-1}A)(BA^{-1})=(A^{-1}B)(AA^{-1})$$

$$I(BA^{-1})=(A^{-1}B)I$$

所以
$$BA^{-1}=A^{-1}B$$

(ii)
$$B^{-1}(BA^{-1})B^{-1}=B^{-1}(A^{-1}B)B^{-1}$$

$$(B^{-1}B)(A^{-1}B^{-1})=(B^{-1}A^{-1})(BB^{-1})$$

$$I(A^{-1}B^{-1})=(B^{-1}A^{-1})I$$

所以
$$A^{-1}B^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

3.30 若A、B是非奇异对称矩阵，且可交换，试证：(i) $A^{-1}B$；(ii) AB^{-1}；(iii) $A^{-1}B^{-1}$是对称的。

提示： $(A^{-1}B)^T=(BA^{-1})^T=(A^{-1})^TB^T=A^{-1}B$

3.31 试证当且仅当$(I-A)(I+A)=0$，矩阵 A 是对合矩阵（即 $A^2=I$）。

证：设 A 是对合矩阵，即 $A^2=I$，

则
$$(I-A)(I+A)=I-A^2=0$$

再设 $(I-A)(I+A)=I-A^2=0$，显然 $A^2=I$。

3.33 若 A 为方阵，试证：(i) AA^T 与 A^TA 是对称的，(ii) $A+\overline{A}^T$，$A\overline{A}^T$，$\overline{A}^TA$ 是埃尔米特矩阵。

证：(i)
$$(AA^T)^T=(A^T)^TA^T=AA^T$$

$$(A^TA)^T=A^T(A^T)^T=A^TA$$

(ii) 埃尔米特矩阵的定义是$(\overline{A})^T=A$

$$(\overline{A+\overline{A}^T})^T=(\overline{A}+A^T)^T=\overline{A}^T+A=A+\overline{A}^T$$

$$(\overline{A\overline{A}^T})^T=(\overline{A}A^T)^T=A\overline{A}^T$$

$$(\overline{\overline{A}^TA})^T=(A^T\overline{A})^T=\overline{A}^TA$$

3.35 若 A 是 n 阶方阵，试证 $B=A+A^T$ 是对称的。

证：证法一：

$$B^T=(A+A^T)^T=A^T+A=A+A^T=B$$

证法二：

矩阵 A 第 i 行第 j 列的元素是 a_{ij}，矩阵 A^T 相应行列的元素为 a_{ji}。而 $b_{ij}=a_{ij}+a_{ji}$。A 的第 j 行第 i 列的元素为 a_{ji}，A^T 相应行列

的元素为 a_{ij}，而 $b_{ji}=a_{ji}+a_{ij}$，故 $b_{ij}=b_{ji}$，B 是对称的。　　（证毕）

3.37　试证：若 m 阶方阵 A 是对称的（反对称的），P 是 $m\times n$ 矩阵，则 $B=P^TAP$ 是对称的（反对称的）。

证：如果 A 是对称的，

则 $$B^T=(P^TAP)^T=P^TA^T(P^T)^T=P^TA^TP=P^TAP=B$$

所以 B 是对称的。

如果 A 是反对称的，

则 $$B^T=(P^TAP)^T=-P^TAP=-B$$

所以 B 是反对称的。　　（证毕）

3.39　试证 P 为非奇异矩阵时，$P^{-1}AP$ 与 A 的本征多项式相同。

证：$\det(P^{-1}AP-\lambda I)=\det(P^{-1}AP-\lambda P^{-1}IP)$

$=\det[P^{-1}(A-\lambda I)P]=\det P^{-1}\det(A-\lambda I)\det P$

$=\det(A-\lambda I)$

所以，$P^{-1}AP$ 与 A 的本征多项式相同。　　（证毕）

3.41　用正交矩阵将 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 化为对角矩阵。

解：

$$\det A=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\1&2-\lambda&1\\1&1&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(4-\lambda)=0$$

故本征值为1与4。

求本征矢量

当 $\lambda=1$ 时，

由 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+x_2+x_3=0\\x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$ 得基本解 $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

当 $\lambda=4$时，由$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=0\\x_1-2x_2+x_3=0\\x_1+x_2-2x_3=0\end{cases}$ 得基本解$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

由于 A 是实对称矩阵，所以，对于相异本征值的本征矢量正交。因此，对 $\lambda=1$的本征矢量正规正交化，在对于 $\lambda=4$的本征矢量中，如果取大小为1的那个时，就作出由三个本征矢量组成的正规正交系。

设 $\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ 及 $\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，用施密特正交化法，则有

$$\boldsymbol{p}_2=\frac{\boldsymbol{x}_2-(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{x}_2-(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}_1|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$P=(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\text{是正交矩阵，}$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

3.42　设 $A=\begin{pmatrix}7&-2&1\\-2&10&-2\\1&-2&7\end{pmatrix}$，$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$，$\lambda_i$是 A 的本征值，求正交矩阵 P。

答：
$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

3.43　求以下矩阵的本征值与本征矢量。

(i) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$，(ii) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

答：(i)本征值是2，−3。与此对应的本征矢量是 $C_1\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$，$C_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$。

(ii)本征值是0，0，−4。与此对应的本征矢量是 $C_1\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$C_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$C_3\begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$。

3.44　求以下矩阵的本征值与本征矢量。

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

答：(i)本征值是0，6，与0相对应的本征矢量是 $C_1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$；与6相对应的本征矢量是 $C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$。

(ii)本征值是2,1,−2。与此对应的本征矢量是 $C_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,

$C_2\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$,$C_3\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$。

3.45 若 n 阶方阵 A 有 n 个线性无关的不变矢量,试证 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,$\lambda_i$ 是 A 的本征值。

证:设对应于本征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的 n 个线性无关的不变矢量为 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n$,于是 $A\boldsymbol{X}_i=\lambda_i\boldsymbol{X}_i(i=1,2,\cdots,n)$。设 $P=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n)$,则

$$AP=(A\boldsymbol{X}_1,A\boldsymbol{X}_2,\cdots,A\boldsymbol{X}_n)=(\lambda_1\boldsymbol{X}_1,\lambda_2\boldsymbol{X}_2,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{X}_n)$$

$$=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$=P\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

所以 $P^{-1}AP=P^{-1}P\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$

3.46 将 $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$ 化为对角矩阵。

答:$P=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$,$P^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

3.47 设 A 为三阶方阵,试证

$$\det(A-\lambda I)=-\lambda^3+\mathrm{tr}A\lambda^2-\mathrm{tr}(\mathrm{adj}A)\lambda+\det A$$

证:3阶方阵 A 的本征方程可写为

$$\det(A-\lambda I)=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda)$$

$$=-\lambda^3+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\lambda^2-(\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)\lambda+\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0$$

式中　$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\text{tr}A^2$，$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\det A$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}$$ 中含 λ 项的系数是

$$-(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})-(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})$$

而 A 的伴随阵 $\text{adj}A$ 的迹是

$$\text{tr}(\text{adj}A)=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

所以　$\text{tr}(\text{adj}A)=\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2$

3.49　试证：A 为反对称矩阵，若 λ 为本征值，则 $-\lambda$ 也是本征值。

证：设 $\det(A-\lambda I)=0$，由于 $A=-A^T$，因而 $0=\det(-A^T-\lambda I)=\det[(-1)(A+\lambda I)^T]=(-1)^n\det[A-(-\lambda)I]$。所以，$-\lambda$ 也是本征值。

3.50　试证：A 为3阶正交矩阵，且 $\det A=1$时，具有本征值1。其次，如果-1是本征值，则-1是本征方程的重根。

提示：先证 $\text{tr}(\text{adj}A)=\text{tr}A$，再用题3.47的结果。

3.51　试证方阵 A 可唯一地表为 $A=B+iC$（B、C 为埃尔米特矩阵）。再将 $A=\begin{pmatrix} 1+i & i \\ 2 & 3-i \end{pmatrix}$ 表成 $A=B+iC$ 的形式。

证：由题意有 B、C 是埃尔米特矩阵。若写成 $A=B+iC$ 时，则 $\overline{A}^T=(\overline{B+iC})^T=\overline{B}^T-i\overline{C}^T$。

由于 $B=\overline{B}^T$，$C=\overline{C}^T$，所以 $\overline{A}^T=B+iC$。

从而必有 $B=\dfrac{A+\overline{A}^T}{2}$，$C=\dfrac{A-\overline{A}^T}{2i}$，亦即若存在就唯一确定。

其次　$$\left(\overline{\frac{A+\overline{A}^T}{2}}\right)^T=\frac{\overline{A}^T+(\overline{\overline{A}^T})^T}{2}=\frac{A+\overline{A}^T}{2}$$

$$\left(\overline{\frac{A-\overline{A}^T}{2i}}\right)^T=\left[\overline{-\frac{i}{2}(A-\overline{A}^T)}\right]^T=\frac{i}{2}(\overline{A-\overline{A}^T})^T$$

$$=\frac{i}{2}(\overline{A}^T-\overline{(\overline{A})}^{TT})=-\frac{i}{2}(A-\overline{A}^T)=\frac{A-\overline{A}^T}{2i}$$

所以，都是埃尔米特矩阵，且

$$A=\frac{A+\overline{A}^T}{2}+i\,\frac{A-\overline{A}^T}{2i}$$

由此计算

$$\begin{pmatrix}1+i & i\\ 2 & 3-i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1+\dfrac{i}{2}\\ 1-\dfrac{i}{2} & 3\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}1 & \dfrac{1}{2}+i\\ \dfrac{1}{2}-i & -1\end{pmatrix}$$

3.52　对于 n 阶矩阵 A 以及非零的 n 维行矢量 $\boldsymbol{x}$，试证满足 $\boldsymbol{x}A=\lambda\boldsymbol{x}$ 的数 λ 不外是 A 的本征值，称矢量 $\boldsymbol{x}$ 为 A 的左本征矢量。而满足 $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ 的 $\boldsymbol{x}$ 叫做右本征矢量。只说本征矢量时，指的是右本征矢量。

证：由于 $\boldsymbol{x}A=\lambda\boldsymbol{x}$，因而 $\boldsymbol{x}(A-\lambda I)=\boldsymbol{0}$。转置得 $(A-\lambda I)^T\boldsymbol{x}^T=\boldsymbol{0}$。因为 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，所以

$$\det(A-\lambda I)^T=\det(A-\lambda I)=0$$

从而，λ 为 A 的本征值。

3.53　试证：矩阵 A 为奇异阵时，A 具有本征值0。反之，若 A 具有本征值0时，则 A 是奇异阵。

证：设 $\det A=0$，对于本征方程 $\det(A-\lambda I)=0$，令 $\lambda=0$，由于满足 $\det(A-0I)=\det A=0$，所以，$\lambda=0$ 是本征值。反之，设 $\lambda=0$ 是本征值，则 $\det(A-0I)=\det A=0$。

3.54　试证 A 为非奇异阵时，A 的本征矢量是 A^{-1} 的本征矢量。又 A^{-1} 的本征值是什么？

证：若 A 为非奇异矩阵，则由题3.53知不具有 $\lambda=0$ 的本征值。设 λ 为 A 的本征值，$\boldsymbol{x}$ 为本征矢量时，则 $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$。从而得到 $A^{-1}\boldsymbol{x}=\lambda^{-1}\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}$ 是对应于本征值 λ^{-1} 的本征矢量。对于 A 的本征值 λ，λ^{-1}

是 A^{-1}的本征值，反之，对应于 A^{-1}的本征值 μ，μ^{-1}为 A 的本征值。因此，A^{-1}的本征值与 A 的本征值的倒数相一致。

3.55 证明与 A 的本征值中相异的本征值所对应的本征矢量是线性无关的。

证：设与 A 的本征值中相异的本征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 所对应的本征矢量为 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$。要证明的是矢量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性无关。

设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_{k+1}(k+1\leqslant m)$线性相关，则唯一地可表为

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_k\boldsymbol{x}_k$$

由于 $$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{A}(c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_k\boldsymbol{x}_k)$$

因而 $$\lambda_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}=c_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1+c_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_k\lambda_k\boldsymbol{x}_k$$

但 $$\lambda_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}=\lambda_{k+1}(c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_k\boldsymbol{x}_k)$$

所以 $c_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1+c_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_k\lambda_k\boldsymbol{x}_k=c_1\lambda_{k+1}\boldsymbol{x}_1+c_2\lambda_{k+1}\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_k\lambda_{k+1}\boldsymbol{x}_k$

故有 $(c_1\lambda_1-c_1\lambda_{k+1})\boldsymbol{x}_1+(c_2\lambda_2-c_2\lambda_{k+1})\boldsymbol{x}_2+\cdots+(c_k\lambda_k-c_k\lambda_{k+1})\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{0}$

由于 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_k$ 是线性无关的，所以，

$$c_1(\lambda_1-\lambda_{k-1})=c_2(\lambda_2-\lambda_{k+1})=\cdots=c_k(\lambda_k-\lambda_{k+1})=0。$$

因为 $\lambda_i-\lambda_{k+1}\neq0(i=1,2,\cdots,k)$，所以 $c_1=c_2=\cdots=c_k=0$。这与 $\boldsymbol{x}_{k+1}\neq\boldsymbol{0}$相矛盾，因此 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性无关。

3.57 求矩阵$\begin{pmatrix}a & b\\ c & 2c\end{pmatrix}$是正交矩阵的条件。

解：首先 a,b,c 必须是实数。因正交条件是 $A^TA=I$(列矢量是正规正交系的条件)，因而

由 $$\begin{pmatrix}a & c\\ b & 2c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & 2c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+c^2 & ab+2c^2\\ ab+2c^2 & b^2+4c^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

得 $$\begin{cases}a^2+c^2=1 & \text{(i)}\\ b^2+4c^2=1 & \text{(ii)}\\ ab+2c^2=0 & \text{(iii)}\end{cases}$$

(i)－(ii)得 $$a^2-b^2-3c^2=0 \qquad \text{(iv)}$$

由(iii)得 $c^2=-\dfrac{ab}{2}$代入(iv)中，整理后得

$$(2a-b)(a+2b)=0$$

从而有$2a=b$ 或 $a=-2b$。

将$2a=b$ 代入(iii)，得$2a^2+2c^2=0$，于是 $a=c=b=0$，产生矛盾。将$a=-2b$ 代入③得

$$-2b^2+2c^2=0$$

由此可见，$c=b$ 或 $c=-b$。于是得到如下结果：

$$a=\pm\frac{2}{\sqrt{5}},\ b=\mp\frac{1}{\sqrt{5}},\ c=\mp\frac{1}{\sqrt{5}}$$

或 $$a=\pm\frac{2}{\sqrt{5}},\ b=\mp\frac{1}{\sqrt{5}},\ c=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

3.58　由矢量 $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$，作出正规正交系。

答：$\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_2=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

3.59　求与矢量 $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}i\\2\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\i\end{pmatrix}$都正交，且大小为1的矢量。

解：设所求的矢量为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，条件是 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}_1=0$，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}_2=0$，$\det\boldsymbol{x}=1$

用分量形式表示，则有

$$\begin{cases}ix_1+2x_2-x_3=0 & \text{(i)}\\ x_1+2x_2+ix_3=0 & \text{(ii)}\\ x_1\bar{x}_1+x_2\bar{x}_2+x_3\bar{x}_3=1 & \text{(iii)}\end{cases}$$

(ii)－(i)得　$(1-i)x_1+(1+i)x_3=0$　$x_1=ix_3$

(i)－i(ii)得　$(2-2i)x_2=0$　$x_2=0$

由(iii)得　$(ix_3)(\overline{ix_3})+x_3\bar{x}_3=1$，即$2x_3\bar{x}_3=1$

$$x_3\bar{x}_3=|x_3|^2 \quad 所以 \quad |x_3|=1/\sqrt{2}$$

令 $x_3=c$，所求矢量为 $\boldsymbol{c}\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，(其中 $|\boldsymbol{c}|=1/\sqrt{2}$)。

3.60　求与矢量 $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1+i \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 都正交，且大小为1的矢量。

答：$\boldsymbol{c}\begin{pmatrix} i/3 \\ 1-\frac{2}{3}i \\ 1 \end{pmatrix}$，$\left(其中 |\boldsymbol{c}|=\frac{3}{\sqrt{23}}\right)$

3.61　用适当的酉矩阵使矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 成为对角矩阵。

解：$\det A=\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}=(-\lambda)^2(1-\lambda)-(1-\lambda)$

$$=(1-\lambda)(\lambda^2-1)=0$$

得到本征值 $-1,1,1$。

对应于 $\lambda=-1$ 的本征矢量：由于

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}，因而\begin{cases} x_3=-x_1 \\ x_2=-x_2 \\ x_1=-x_3 \end{cases}$$

令 $x_3=c$ 得本征矢量为 $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$。

对应于 $\lambda=1$ 的本征矢量：由于

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}，因而 \begin{cases} x_3 = x_1 \\ x_2 = x_2 \\ x_1 = x_3 \end{cases}$$

令 $x_2=c_1, x_3=c_2$，得本征矢量为 $\boldsymbol{c}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{c}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$。由于矢量

$\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{c}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{c}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 互相正交，除以各个矢量自己的长度，

得

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

设
$$U=(\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

则
$$U^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}U=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.62　用适当的酉矩阵使矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ 成为对角矩阵。

答：$U=(\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2)=\begin{pmatrix} \dfrac{i}{\sqrt{2}} & -\dfrac{i}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$，

$$U^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}U=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3.63　设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，计算 A^n（n 为正整数）。

解：$\det A=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-4=(\lambda-3)(\lambda+1)=0$得本征值 $\lambda_1=3,\lambda_2=-1$。对应的本征矢量为 $c_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},c_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$。各自作成的单位矢量为 $p_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$。作矩阵 $P=(p_1,p_2)$，P 为正交矩阵，$P^TAP=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=D$

$$A=P^TDP,\ A^n=(P^TDP)(P^TDP)\cdots(P^TDP)=P^TD^nP$$

$$A^n=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n & 0\\ 0 & (-1)^n\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^n+(-1)^n & 3^n-(-1)^n\\ 3^n-(-1)^n & 3^n+(-1)^n\end{pmatrix}$$

3.64　**计算**：(i) $\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}^n$，(ii) $\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}^n$

答：(i) $\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & \lambda^n\end{pmatrix}$，(ii) $\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{1}{2}n(n-1)\lambda^{n-2}\\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & 0 & \lambda^n\end{pmatrix}$

3.65　设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$，用凯莱-哈密顿定理求 A^3,A^4。设 A 为非奇异矩阵，求 A^{-1},A^{-2}。

解：本征方程

$$\det(A-\lambda I)=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -2\\ -3 & \lambda-1 & -1\\ -2 & -3 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-3\lambda^2-7\lambda-11=0$$

根据凯莱-哈密顿定理有

$$A^3 = 3A^2 + 7A + 11I = \begin{bmatrix} 42 & 31 & 29 \\ 45 & 39 & 31 \\ 53 & 45 & 42 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = 3A^3 + 7A^2 + 11A = \begin{bmatrix} 193 & 160 & 144 \\ 224 & 177 & 160 \\ 272 & 224 & 193 \end{bmatrix}$$

从 $11I = -7A - 3A^2 + A^3$，有

$$A^{-1} = \frac{1}{11}(-7I - 3A + A^2) = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \\ 7 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-2} = \frac{1}{11}(-7A^{-1} - 3I + A) = \frac{1}{121}\begin{bmatrix} -8 & -24 & 29 \\ 40 & 1 & -24 \\ -27 & 40 & -8 \end{bmatrix}$$

第四章　张量概念

4.1　用求和约定改写下列各式：

(a) $\mathrm{d}\Phi=\dfrac{\partial\Phi}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1+\dfrac{\partial\Phi}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+\cdots+\dfrac{\partial\Phi}{\partial x^N}\mathrm{d}x^N$，

(b) $\dfrac{\mathrm{d}\bar{x}^k}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^1}\dfrac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^2}\dfrac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}+\cdots+\dfrac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^N}\dfrac{\mathrm{d}x^N}{\mathrm{d}t}$，

(c) $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+\cdots+(x^N)^2$，

(d) $\mathrm{d}s^2=g_{11}(\mathrm{d}x^1)^2+g_{22}(\mathrm{d}x^2)^2+g_{33}(\mathrm{d}x^3)^2$，

(e) $\sum\limits_{p=1}^{3}\sum\limits_{q=1}^{3}g_{pq}\mathrm{d}x^p\mathrm{d}x^q$。

解：(a) $\mathrm{d}\Phi=\dfrac{\partial\Phi}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i$，　(b) $\dfrac{\mathrm{d}\bar{x}^k}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^i}\dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}$，　(c) x^kx^k，

(d) $\mathrm{d}s^2=g_{pp}\mathrm{d}x^p\mathrm{d}x^p\,(N=3)$，(e) $g_{pq}\mathrm{d}x^p\mathrm{d}x^q\,(N=3)$，

4.2　用求和约定改写下列各式：

(a) $a_1x^1x^3+a_2x^2x^3+\cdots+a_Nx^Nx^3$，

(b) $A^{21}B_1+A^{22}B_2+A^{23}B_3+\cdots+A^{2N}B_N$，

(c) $A^j_1B^1+A^j_2B^2+A^j_3B^3+\cdots+A^j_NB^N$，

(d) $g^{21}g_{11}+g^{22}g_{21}+g^{23}g_{31}+g^{24}g_{41}$，

(e) $B^{121}_{11}+B^{122}_{12}+B^{221}_{21}+B^{222}_{22}$。

答：(a) $a_ix^ix^3$，(b) $A^{2k}B_k$，(c) $A^j_kB^k$，(d) $g^{2k}g_{k1}$，(e) $B^{j2k}_{jk}\,(N=2)$。

4.3　将下列用求和约定写成的表示式改写为多项求和的表示式：

(a) $a_{jk}x^k$，(b) $A_{pq}A^{qr}$，(c) $\bar{g}_{rs}=g_{jk}\dfrac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^r}\dfrac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^s}$，$N=3$。

解：

(a) $a_{jk}x^k=a_{j1}x^1+a_{j2}x^2+\cdots+a_{jN}x^N$，

(b) $A_{pq}A^{qr}=A_{p1}A^{1r}+A_{p2}A^{2r}+\cdots+A_{pN}A^{Nr}$，

(c) $\bar{g}_{rs}=g_{11}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^s}+g_{21}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^s}+g_{31}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^s}$

$+g_{12}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^s}+g_{22}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^s}+g_{32}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^s}$

$+g_{13}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^s}+g_{23}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^s}+g_{33}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^s}$

4.4 将下列用求和约定写成的表示式改写为多项求和的表示式：

(a) $\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}\,A^k)$, $N=3$；(b) $A^{jk}B^i_kC_j$, $N=2$；(c) $\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m}$。

答：(略)。

4.5 若 x^k, $k=1,2,\cdots,N$ 是直角坐标，下列方程当 $N=2,3$ 或 $N\geqslant4$时各表示什么轨迹？必要时，假设这些函数是单值、连续可导、独立的。

(a) $a_kx^k=1$，式中 k 为常量；(b) $x^kx^k=1$，(c) $x^k=x^k(u)$，(d) $x^k=x^k(u,v)$。

解：

(a) $a_kx^k=1$，式中 k 为常量。

当 $N=2$时，$a_1x^1+a_2x^2=1$，表示平面上的一条直线；

当 $N=3$时，$a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3=1$，表示三维空间中的一平面；

当 $N\geqslant4$时，$a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_Nx^N=1$，表示超平面。

(b) $x^kx^k=1$

当 $N=2$时，$(x^1)^2+(x^2)^2=1$，平面里半径为1的圆；

当 $N=3$时，$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=1$，半径为1的球面；

当 $N\geqslant4$时，$(x^1)^2+(x^2)^2+\cdots+(x^N)^2=1$，半径为1的超球面。

(c) $x^k=x^k(u)$

当 $N=2$，$x^1=x^1(u)$，$x^2=x^2(u)$含参变量的平面曲线，

当 $N=3$，$x^1=x^1(u)$，$x^2=x^2(u)$，$x^3=x^3(u)$，三维空间曲线，

当 $N\geqslant4$，N 维空间曲线。

(d) $x^k=x^k(u,v)$

当 $N=2, x^1=x^1(u,v), x^2=x^2(u,v)$，表示从 (u,v) 到 (x^1,x^2) 的坐标变换，

当 $N=3, x^1=x^1(u,v), x^2=x^2(u,v), x^3=x^3(u,v)$，含参变量 u、v 的三维曲面，

当 $N\geqslant 4$，超曲面。

4.6 当 $N=2$，3或4时，方程 $a_k x^k x^k=1$ 表示什么轨迹？式中 $x^k, k=1,2,\cdots,N$ 是直角坐标，a_k 是非负常量。

答：$N=2$时是椭圆，$N=3$时是椭球，$N=4$时是超椭球。

4.7 在三维空间里，求下列含克罗内克符号 δ_{ij} 表示式的值。

(a) $\delta_{ij}\delta_{ij}$，(b) $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk}$。

解：

(a) $\delta_{ij}\delta_{ij}=\delta_{1j}\delta_{1j}+\delta_{2j}\delta_{2j}+\delta_{3j}\delta_{3j}=3$

(b) $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk}=\delta_{1j}\delta_{1k}\delta_{jk}+\delta_{2j}\delta_{2k}\delta_{jk}+\delta_{3j}\delta_{3k}\delta_{jk}=3$

或
$$\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk}=\delta_{ik}\delta_{ik}=3$$

4.8 在三维空间里，求下列含克罗内克符号 δ_{ij} 表示式的值。

(a) $\delta_{ij}\delta_{jk}$，(b) $\delta_{ij}\delta_{ik}$。

答：(a) δ_{ik}，(b) δ_{jk}。

4.9 计算：(a) $\delta^p_q A^{qr}_s$，(b) $\delta^p_q \delta^q_r$。

解：因为 $\delta^p_q=\begin{cases}1, & 若\ p=q\\ 0, & 若\ p\neq q\end{cases}$，所以

$$\delta^p_q A^{qr}_p = A^{pr}_s,\ \delta^p_q\delta^p_r=\delta^p_r$$

4.10 计算：(a) $\delta^p_q B^{rs}_p$，(b) $\delta^p_q\delta^r_s A^{qs}$，(c) $\delta^p_q\delta^q_r\delta^r_s$。

答：(a) B^{rs}_q，(b) A^{pr}，(c) δ^p_s。

4.11 试证：在三维空间里，$\in_{ijk}\in_{kij}=6$。

证：(i)关于 i 有 $\in_{ijk}\in_{kij}=\in_{1jk}\in_{k1j}+\in_{2jk}\in_{k2j}+\in_{3jk}\in_{k3j}$，

(ii)关于 j，不为零的项有

$$\begin{aligned}\in_{ijk}\in_{kij}=&\in_{12k}\in_{k12}+\in_{13k}\in_{k13}+\in_{21k}\in_{k21}\\&+\in_{23k}\in_{k23}+\in_{31k}\in_{k31}+\in_{32k}\in_{k32}\end{aligned}$$

(iii)关于 k，不为零的项有

$$\in_{ijk}\in_{kij}=\in_{123}\in_{312}+\in_{132}\in_{213}+\in_{213}\in_{321}+\in_{231}\in_{123}$$
$$+\in_{312}\in_{231}+\in_{321}\in_{132}$$
$$=(1)(1)+(-1)(-1)+(-1)(-1)+(1)(1)$$
$$+(-1)(-1)+(-1)(-1)$$
$$=6$$

4.13　试证：

$$\in_{pqs}\in_{mnr}=\begin{vmatrix}\delta_{mp} & \delta_{mq} & \delta_{ms}\\ \delta_{np} & \delta_{nq} & \delta_{ns}\\ \delta_{rp} & \delta_{rq} & \delta_{rs}\end{vmatrix}$$

证：设 A_{ij}的行列式为

$$\det A=\begin{vmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{vmatrix}$$

将行与行、列与列每交换一次，行列式就变号一次，所以任意换行后有

$$\begin{vmatrix}A_{m1} & A_{m2} & A_{m3}\\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3}\\ A_{r1} & A_{r2} & A_{r3}\end{vmatrix}=\in_{mnr}\det A$$

任意换列后有

$$\begin{vmatrix}A_{1p} & A_{1q} & A_{1s}\\ A_{2p} & A_{2q} & A_{2s}\\ A_{3p} & A_{3q} & A_{3s}\end{vmatrix}=\in_{pqs}\det A$$

因此，任意地将行与行交换，列与列交换后有

$$\begin{vmatrix}A_{mp} & A_{mq} & A_{ms}\\ A_{np} & A_{nq} & A_{ns}\\ A_{rp} & A_{rq} & A_{rs}\end{vmatrix}=\in_{mnr}\in_{pqs}\det A$$

令 $A_{ij}=\delta_{ij}$，则 $\det A=1$，因此有

$$\begin{vmatrix} \delta_{mp} & \delta_{mq} & \delta_{ms} \\ \delta_{np} & \delta_{nq} & \delta_{ns} \\ \delta_{rp} & \delta_{rq} & \delta_{rs} \end{vmatrix} = \in_{pqs} \in_{mnr}$$

4.15　试证：$\in_{pqs}\in_{snr}=\delta_{pn}\delta_{qr}-\delta_{pr}\delta_{qn}$

证：将4.13题结论中的行列式展开，得

$$\in_{pqs}\in_{mnr}=\delta_{mp}(\delta_{nq}\delta_{rs}-\delta_{ns}\delta_{rq})+\delta_{mq}(\delta_{ns}\delta_{rp}$$
$$-\delta_{np}\delta_{rs})+\delta_{ms}(\delta_{np}\delta_{rq}-\delta_{nq}\delta_{rp})$$

用 s 代替 m，则有

$$\begin{aligned}\in_{pqs}\in_{snr}&=\delta_{sp}(\delta_{nq}\delta_{rs}-\delta_{ns}\delta_{rq})+\delta_{sq}(\delta_{ns}\delta_{rp}\\&\quad-\delta_{np}\delta_{rs})+\delta_{ss}(\delta_{np}\delta_{rq}-\delta_{nq}\delta_{rp})\\&=\delta_{nq}\delta_{rp}-\delta_{np}\delta_{rq}+\delta_{nq}\delta_{rp}-\delta_{np}\delta_{rq}\\&\quad+3(\delta_{np}\delta_{rq}-\delta_{nq}\delta_{rp})\\&=\delta_{np}\delta_{rq}-\delta_{nq}\delta_{rp}=\delta_{pn}\delta_{qr}-\delta_{pr}\delta_{qn}\end{aligned}$$

4.17　用下标表示法，证明：若 $\dot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}$，$\dot{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$，则有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$。

证：设 $\boldsymbol{X}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$

$$X_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\in_{ijk}u_jv_k)=\in_{ijk}\dot{u}_jv_k+\in_{ijk}u_j\dot{v}_k$$

因为 $\dot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}$，$\dot{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$，所以

$$\dot{u}_j=\in_{jpq}\omega_pu_q,\ \dot{v}_k=\in_{kmn}\omega_mv_n,$$

代入上式得

$$\begin{aligned}X_i&=\in_{ijk}\in_{jpq}\omega_pu_qv_k+\in_{ijk}\in_{kmn}\omega_mu_jv_n\\&=(\in_{ijk}\in_{kmn}-\in_{ink}\in_{kmj})\omega_mu_jv_n\\&=(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{nj}+\delta_{ij}\delta_{nm})\omega_mu_jv_n\\&=(\delta_{ij}\delta_{nm}-\delta_{in}\delta_{jm})\omega_mu_jv_n\end{aligned}$$

所以
$$\boldsymbol{X}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$$

4.19　证明：$\frac{\partial x^p}{\partial x^q}=\delta^p_q$

证：若 $p=q$，$\frac{\partial x^p}{\partial x^q}=1$，因为 $x^p=x^q$

若 $p\neq q$，$\frac{\partial x^p}{\partial x^q}=0$，因为 x^p 与 x^q 互不相关。

所以
$$\frac{\partial x^p}{\partial x^q}=\delta_q^p$$

4.21　写出下列张量的变换律：(a) $A^{i}_{\cdot jk}$，(b) $B^{mn}_{\cdot\cdot ijk}$，(c) C^m

解：

(i) $\overline{A}^{p}_{\cdot qr}=\frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^q}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^r}A^{i}_{\cdot jk}$

(ii) $\overline{B}^{pq}_{\cdot\cdot rst}=\frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^m}\frac{\partial \overline{x}^q}{\partial x^n}\frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^s}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^t}B^{mn}_{\cdot\cdot ijk}$

(iii) $\overline{C}^p=\frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^m}C^m$

4.23　$A(j,k,l,m)$是坐标 x^i 的函数，它从坐标系 x^i 变换到坐标系 $\overline{x}^i$ 时符合以下的变换律：

$$\overline{A}(p,q,r,s)=\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^p}\frac{\partial \overline{x}^q}{\partial x^k}\frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^l}\frac{\partial \overline{x}^s}{\partial x^m}A(j,k,l,m)$$

试问 $A(j,k,l,m)$是不是张量？如果是就请你写出张量的上、下指标，并说明其逆变与协变的阶数。

解：$\overline{A}^{qrs}_{\cdot\cdot\cdot p}=\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^p}\frac{\partial \overline{x}^q}{\partial x^k}\frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^l}\frac{\partial \overline{x}^s}{\partial x^m}A^{klm}_{\cdot\cdot\cdot j}$

所以它是三阶逆变、一阶协变的四阶张量。

4.24　设 $\overline{B}(p,q,r)=\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^p}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^q}\frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^m}B(j,k,m)$，$\overline{C}(p,q,r,s)=\frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^j}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^n}C(j,k,m,n)$。问哪一个是张量？如果是张量，就请写出张量的上、下指标，并说明其逆变与协变的协数。

答：只有 $B^{m}_{\cdot jk}$是一阶逆变、二阶协变的三阶张量。

4.25　设一张量在笛卡尔直角坐标系里的协变分量为$2x-z$，x^2y，yz。试求该张量在柱面坐标系 ρ、φ、z 的协变分量。

解：设 A_j 表示张量在笛卡尔直角坐标系 $x^1=x$，$x^2=y$，$x^3=z$ 中的协变分量，则

$$A_1 = 2x^1 - x^3,\ A_2 = (x^1)^2 x^2,\ A_3 = x^2 x^3$$

令 $\overline{A}_k$ 表示张量在柱面坐标系 $\overline{x}^1=\rho,\ \overline{x}^2=\theta,\ \overline{x}^3=z$ 中的协变分量，由于协变张量的变换律是

$$\overline{A}_k = \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^k} A_j \tag{a}$$

而两组坐标系之间的关系是

$$x^1 = \overline{x}^1\cos\overline{x}^2,\ x^2 = \overline{x}^1\sin\overline{x}^2,\ x^3 = \overline{x}^3$$

故由式(a)可得

$$\begin{aligned}
\overline{A}_1 &= \frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^1}A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^1}A_2 + \frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^1}A_3 \\
&= \cos\overline{x}^2(2x^1 - x^3) + \sin\overline{x}^2(x^1)^2(x^2) \\
&= 2\rho\cos^2\varphi - z\cos\varphi + \rho^3\sin^2\varphi\cos^2\varphi \\
\overline{A}_2 &= \frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^2}A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^2}A_2 + \frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^3}A_3 \\
&= -\overline{x}^1\sin\overline{x}^2(2x^1 - x^3) + \overline{x}^1\cos\overline{x}^2(x^1)^2x^2 \\
&= -2\rho^2\sin\varphi\cos\varphi + \rho z\sin\varphi + \rho^4\sin\varphi\cos^3\varphi \\
\overline{A}_3 &= \frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^3}A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^3}A_2 + \frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^3}A_3 \\
&= x^2x^3 = \rho z\sin\varphi
\end{aligned}$$

4.26　试求上题中张量在球面坐标系 r、θ、φ 中的协变分量。

答：$\overline{A}_1 = 2r\sin^2\theta\cos^2\varphi - r\sin\theta\cos\theta\cos\varphi + r^3\sin^4\theta\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin\theta\cos^2\theta\sin\varphi$,

$\overline{A}_2 = 2r^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi - r^2\cos^2\theta\cos\varphi + r^4\sin^3\theta\cos\theta\sin^2\varphi\cos^2\varphi - r^3\sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi$,

$\overline{A}_3 = -2r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi + r^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi + r^4\sin^4\theta\sin\varphi\cos^3\varphi$

4.27　试证：虽然 A_p 是一阶协变张量，但 $\dfrac{\partial A_p}{\partial x^q}$ 不是张量。

证：根据假设 $\overline{A}_j = \dfrac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j}A_p$，对 $\overline{x}^k$ 求导数，

$$\frac{\partial \overline{A}_j}{\partial \overline{x}^k} = \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial A_p}{\partial \overline{x}^k} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \overline{x}^j\partial \overline{x}^k}A_p$$

$$= \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial A_p}{\partial x^q}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^j}A_p$$

$$= \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial A_p}{\partial x^q} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^j}A_p$$

由于第二项的出现，表示它不符合张量的变换律，所以$\frac{\partial A_p}{\partial x^q}$不是张量。以后可以看到，在$\frac{\partial A_p}{\partial x^q}$后加上一适当的项就会构成张量。

4.28　如果 Φ 是不变量，问$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^p \partial x^q}$是不是张量？

答：不是。

4.29　如果 $\bar{A}^p_{\cdot r} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^r}A^q_{\cdot s}$，证明 $A^q_{\cdot s} = \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s}\bar{A}^p_{\cdot r}$。

证：用$\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s}$乘 $\bar{A}^p_{\cdot r} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^r}A^q_{\cdot s}$的两边，即得 $A^q_{\cdot s} = \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s}\bar{A}^p_{\cdot r}$

4.31　设 B^i 与 C^j 是逆变矢量，A_{ij}是协变张量，试证 $A_{ij}B^iC^j$ 是不变量。

证：根据假设有

$$\bar{A}_{pq} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q}A_{ij}, \bar{B}^p = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i}B^i, \bar{C}^j = \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j}C^j$$

$$\bar{A}_{pq}\bar{B}^p\bar{C}^q = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q}A_{ij}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i}B^i\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j}C^j = A_{ij}B^iC^j$$

可见，$A_{ij}B^iC^j$ 是不变量。

4.33　试证 $B_{ik} = \in_{ijk}a_j$ 是反对称张量。

证：$B_{ik} = \in_{ijk}a_j = -(\in_{kji}a_j) = -(B_{ki}) = -B_{ki}$。

4.34　在三维空间里，按(a) $D_{ij} = D_{ji}$，(b) $D_{ij} = -D_{ji}$展开，并尽可能化简 $D_{ij}x_ix_j$。

答：

(a)
$$D_{ij}x_ix_j = D_{11}(x_1)^2 + D_{22}(x_2)^2 + D_{33}(x_3)^2 + 2D_{12}x_1x_2 + 2D_{23}x_2x_3 + 2D_{31}x_3x_1$$

(b)
$$D_{ij}x_ix_j = 0$$

第五章　张量代数

5.1　设 A_{ij} 和 B_{ij} 是二阶协变张量，试证 $\lambda A_{ij}+\mu B_{ij}$ 是二阶协变张量，式中 λ、μ 是纯量。

证：$\overline{A}_{pq}=\frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^p}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^q}A_{ij}$

$$\lambda\overline{A}_{pq}=\frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^p}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^q}\lambda A_{ij}$$

$$\overline{B}_{pq}=\frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^p}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^q}B_{ij}$$

$$\mu\overline{B}_{pq}=\frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^p}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^q}\mu B_{ij}$$

$$\lambda\overline{A}_{pq}+\mu\overline{B}_{pq}=\frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^p}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^q}(\lambda A_{ij}+\mu B_{ij})$$

所以 $\lambda A_{ij}+\mu B_{ij}$ 是二阶协变张量。

5.2　试问二阶逆变对称张量最多有多少个不同的分量？设(a) $N=4$，(b) $N=6$，(c) N 为任意数。

答：(a) 10，(b) 21，(c) $N(N+1)/2$。

5.3　设张量 A^{pqr}_{st} 在一个坐标系中对于指标 p 与 q 是对称的（或反对称的），试证它在任何坐标系中对于指标 p 与 q 都是对称的（或反对称的）。

证：因为仅就指标 p 与 q 有对称关系，故只需对 B^{pq} 作证明。

若 B^{pq} 是对称的，即 $B^{pq}=B^{qp}$，于是

$$\overline{B}^{jk}=\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^q}B^{pq}=\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p}B^{qp}=\overline{B}^{kj}$$

表明 B^{pq} 在坐标系 $\overline{x}^i$ 中保持对称。

类似地可以证明张量保持反对称关系。

5.5　设 A_{ij} 是对称张量，B_{ij} 是反对称张量，试证 $A_{ij}B_{ij}=0$

证：因为 $A_{ij}=A_{ji}$，$B_{ij}=-B_{ji}$，于是 $A_{ij}B_{ij}=-A_{ji}B_{ji}$

$$A_{ij}B_{ij} + A_{ji}B_{ji} = A_{ij}B_{ij} + A_{pq}B_{pq} = 0$$

因为所有的指标都是哑标,所以可写成

$$A_{pq}B_{pq} = A_{ij}A_{ij}$$

于是 $$2A_{ij}B_{ij}=0、A_{ij}B_{ij}=0$$

5.6 设 $A^{p}_{\cdot q}$与 B_r 是张量,试证 $A^{p}_{\cdot q}B^r$ 与 $A^{p}_{\cdot q}B^q$ 是张量,并说明它们的阶数。

答:$A^{p}_{\cdot q}B^r$ 是三阶混合张量,$A^{p}_{\cdot q}B^q$ 是一阶逆变张量。

5.7 如果用 D_{ij}的对称部分 $D_{(ij)}$代替 D_{ij},试证二次型 $D_{ij}x_ix_j$ 是不变的。

证:将 D_{ij}表示为对称与反对称两部分之和。

$$D_{ij} = D_{(ij)} + D_{[ij]} = \frac{1}{2}(D_{ij} + D_{ji}) + \frac{1}{2}(D_{ij} - D_{ji})$$

于是 $$D_{(ij)}x_ix_j = \frac{1}{2}(D_{ij}+D_{ji})x_ix_j = \frac{1}{2}(D_{ij}x_ix_j + D_{pq}x_qx_p)$$

$$= \frac{1}{2}(D_{ij}x_ix_j + D_{ij}x_ix_j) = D_{ij}x_ix_j$$

5.9 设 $\Phi = a_{jk}A^jA^k$,试证:总可以写出 $\Phi = b_{jk}A^jA^k$,式中 b_{jk} 是对称的。

证: $$\Phi = a_{jk}A^jA^k = a_{kj}A^kA^j = a_{kj}A^jA^k$$

于是 $$2\Phi = a_{jk}A^jA^k + a_{kj}A^jA^k = (a_{jk}+a_{kj})A^jA^k$$

所以 $$\Phi = \frac{1}{2}(a_{jk}+a_{kj})A^jA^k$$

令 $b_{jk} = \frac{1}{2}(a_{jk}+a_{kj})$是对称的。

5.11 试证张量 $A^{p}_{\cdot q}$的缩并是纯量(或不变量)。

证: $$\bar{A}^{j}_{\cdot k} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}A^{p}_{\cdot q}$$

设 $j=k$ 并求和 $$\bar{A}^{j}_{\cdot j} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}A^{p}_{\cdot q} = \delta^q_p A^{p}_{\cdot q} = A^{p}_{\cdot p}$$

由于 $\bar{A}^{j}_{\cdot j} = A^{p}_{\cdot p}$,所以 $A^{p}_{\cdot p}$是不变量。

5.12 设 $A^{pq}_{\cdot\cdot rst}$是张量,选择 $p=t, q=s$,试证缩并后仍是张量,并说明它的阶数。

答：一阶协变张量。

5.13 试证张量 A^p 与 B_q 的外积的缩并是不变量。

证： $\overline{A}^j = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p} A^p, \overline{B}_k = \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k} B_q$

$$\overline{A}^j \overline{B}_k = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k} A^p B_q$$

缩并（令 $j=k$ 并求和）

$$\overline{A}^j \overline{B}_j = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j} A^p B_q = \delta^q_p A^p B_q = A^p B_p$$

所以 $A^p B_p$ 是不变量。

5.14 试建立下列相伴张量之间的关系：(a) A^{pq} 与 $A_j^{\cdot q}$，(b) $A^{p\cdot r}_{\cdot q}$ 与 A_{jql}。

解：(a) $A^{pq} = g^{pj} A_j^{\cdot q}$，(b) $A^{p\cdot r}_{\cdot q} = g^{pj} g^{rl} A_{jql}$。

5.15 试建立下列相伴张量之间的关系：(a) $A_{j\cdot l}^{\cdot k}$ 与 A^{qkr}，(b) $A^{p\cdot rs}_{\cdot q\cdot\cdot t}$ 与 $A_{jqk}^{\cdot\cdot\cdot st}$。

解：(a) $A_{j\cdot l}^{\cdot k} = g_{jq} g_{lr} g^{qkr}$ (b) $A^{p\cdot rs}_{\cdot q\cdot\cdot t} = g^{pj} g^{rk} g_{tl} A_{jqk}^{\cdot\cdot\cdot sl}$

5.16 试建立下列相伴张量之间的关系：(a) A^{jkl} 与 A_{pqr}，(b) $A_{pq}^{\cdot\cdot r}$ 与 $A^{jk}_{\cdot\cdot l}$。

解：

$$A^{jkl} = g^{jp} g^{kq} g^{lr} A_{pqr}$$

$$A_{pq}^{\cdot\cdot r} = g_{pj} g_{qk} g^{rl} A^{jk}_{\cdot\cdot l}$$

5.17 试证张量 $A^p_{\cdot r}$ 与 $B^{qs}_{\cdot\cdot t}$ 的任何一对指标相同时所求的内积是三阶张量。

证：外积 $A^p_{\cdot r} B^{qs}_{\cdot\cdot t} = C^{jlm}_{\cdot\cdot\cdot kn}$

令 $p=t$，求和可得内积。

由假设

$$\overline{A}^j_{\cdot k} = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^k} A^p_{\cdot r}$$

$$\overline{B}^{lm}_{\cdot\cdot n} = \frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^q} \frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^s} \frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^n} B^{qs}_{\cdot\cdot t}$$

两式相乘得

$$\overline{A}^j_{\cdot k} \overline{B}^{lm}_{\cdot\cdot n} = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^k} \frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^q} \frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^s} \frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^n} A^p_{\cdot r} B^{qs}_{\cdot\cdot t}$$

令 $j=n$，求和

$$\overline{A}^{j}_{\cdot k}\overline{B}^{lm}_{\cdot\cdot j}=\delta^{s}_{p}\frac{\partial x^{r}}{\partial \overline{x}^{k}}\frac{\partial \overline{x}^{l}}{\partial x^{q}}\frac{\partial \overline{x}^{m}}{\partial x^{s}}A^{p}_{\cdot r}B^{qs}_{\cdot\cdot t}$$

$$=\frac{\partial x^{r}}{\partial \overline{x}^{k}}\frac{\partial \overline{x}^{l}}{\partial x^{q}}\frac{\partial \overline{x}^{m}}{\partial x^{s}}A^{p}_{\cdot r}B^{qs}_{\cdot\cdot p}$$

这就证明了 $A^{p}_{\cdot r}B^{qs}_{\cdot\cdot p}$是三阶张量。令 $q=r$，同样可得内积是三阶张量。

5.19　设 A^{p} 与 B_{q} 是任意张量，若 $A^{p}B_{q}C(p,q)$是不变量，试证 $C(p,q)$是一张量，并能写成 $C^{q}_{\cdot p}$。

证：因为 $A^{p}B_{q}C(p,q)$是不变量，所以

$$\overline{A}^{p}\overline{B}_{q}\overline{C}(p,q)=A^{j}B_{k}C(j,k)$$

又因为 A^{p},B_{q} 是矢量（一阶张量），所以

$$\overline{A}^{p}\overline{B}_{q}\overline{C}(p,q)=\frac{\partial \overline{x}^{p}}{\partial x^{j}}\frac{\partial x^{k}}{\partial \overline{x}^{q}}A^{j}B_{k}\overline{C}(p,q)$$

$$A^{j}B_{k}C(j,k)=\frac{\partial \overline{x}^{p}}{\partial x^{j}}\frac{\partial x^{k}}{\partial \overline{x}^{q}}A^{j}B_{k}\overline{C}(p,q)$$

$$A^{j}B_{k}\left[\frac{\partial \overline{x}^{p}}{\partial x^{j}}\frac{\partial x^{k}}{\partial \overline{x}^{q}}\overline{C}(p,q)-C(j,k)\right]=0$$

因为 A^{j},B_{k} 是任意矢量，所以

$$\frac{\partial \overline{x}^{p}}{\partial x^{j}}\frac{\partial x^{k}}{\partial \overline{x}^{q}}\overline{C}(p,q)=C(j,k)$$

两边乘以$\frac{\partial x^{j}}{\partial \overline{x}^{p}}\frac{\partial \overline{x}^{q}}{\partial x^{k}}$得

$$\overline{C}(p,q)=\frac{\partial x^{j}}{\partial \overline{x}^{p}}\frac{\partial \overline{x}^{q}}{\partial x^{k}}C(j,k)$$

所 $C(j,k)=C^{k}_{\cdot j}$即 $C(p,q)=C^{q}_{\cdot p}$

5.21　设 A^{i} 和 B^{i} 是任意的逆变矢量，而 $C_{ij}A^{i}B^{j}$ 是不变量，试证 C_{ij}是二阶协变张量。

证法与5.19题相同。

5.23　设 $ds^{2}=g_{ij}dx^{i}dx^{j}$ 是不变量，试证 g_{ij}是二阶对称协变张量。

证：用5.9题，令 $\Phi=\mathrm{d}s^2$，$A^j=\mathrm{d}x^j$，$A^k=\mathrm{d}x^k$，因 $\mathrm{d}s^2$ 是不变量，所以可以认为 g_{jk} 是对称的。

$$\bar{g}_{pq}\mathrm{d}\bar{x}^p\mathrm{d}\bar{x}^q = g_{jk}\mathrm{d}x^j\mathrm{d}x^k = g_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^p}\mathrm{d}\bar{x}^p\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^q}\mathrm{d}\bar{x}^q$$

$$= g_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^q}\mathrm{d}\bar{x}^p\mathrm{d}\bar{x}^q$$

所以

$$\bar{g}_{pq}=g_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^q}$$

可见 g_{jk} 是二阶对称协变张量，又称为度量张量。

5.24　试求球极坐标系中的度量张量。

答：

$$g_{jk}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta\end{pmatrix}$$

5.25　(a)用第二行的元素及其余因式展开行列式 $g=\begin{vmatrix}g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{vmatrix}$，(b) 试证 $g=g_{jk}G(j,k)$，式中 $G(j,k)$ 是 g_{jk} 的余因式，该式仅对指标 k 求和。

证：(a)　g_{21} 的余因式 $G(2,1)=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}g_{12} & g_{13}\\ g_{32} & g_{33}\end{vmatrix}$，

g_{22} 的余因式 $G(2,2)=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}g_{11} & g_{13}\\ g_{31} & g_{33}\end{vmatrix}$，

g_{23} 的余因式 $G(2,3)=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{31} & g_{32}\end{vmatrix}$

根据行列式理论，有

$$g = g_{21}G(2,1) + g_{22}G(2,2) + g_{23}G(2,3)$$

(b) 将(a)的结果用任何行或任何列，便可得 $g=g_{jk}G(j,k)$，式中仅对 k 求和。

5.27　定义 $g^{jk}=\dfrac{G(j,k)}{g}$，式中 $G(j,k)$ 是行列式 $g=|g_{jk}|\neq 0$ 中元素 g_{jk} 的余因式，试证 $g_{jk}g^{pk}=\delta_j^p$。

证：由题5.25有 $g_{jk}\dfrac{G(j,k)}{g}=1$或 $g_{jk}g^{jk}=1$，式中仅对 k 求和。

由题5.26有 $g_{jk}\dfrac{G(p,k)}{g}=0$，或 $g_{jk}g^{pk}=0$，$p\neq j$。所以 $g_{jk}g^{pk}=$

$$\delta_j^p=\begin{cases}1,若\ j=p\\0,若\ j\neq p\end{cases}。$$

5.29　设矢量 v_i 用基矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表为 $v_i=\alpha a_i+\beta b_i+\gamma c_i$，试证 $\alpha=\dfrac{\in_{ijk}v_ib_jc_k}{\in_{pqr}a_pb_qc_r}$，$\beta=\dfrac{\in_{ijk}a_iv_jc_k}{\in_{pqr}a_pb_qc_r}$，$\gamma=\dfrac{\in_{ijk}a_ib_jv_k}{\in_{pqr}a_pb_qc_r}$。

证：

$$v_1=\alpha a_1+\beta b_1+\gamma c_1$$
$$v_2=\alpha a_2+\beta b_2+\gamma c_2$$
$$v_3=\alpha a_3+\beta b_3+\gamma c_3$$

根据克拉姆(Cramer)定理，以及用排列符号表示行列式展开的关系，有

$$\alpha=\frac{\begin{vmatrix}v_1&b_1&c_1\\v_2&b_2&c_2\\v_3&b_3&c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}}=\frac{\in_{ijk}v_ib_jc_k}{\in_{pqr}a_pb_qc_r}$$

同理可写出 β 与 γ。

5.30　设两组坐标系的轴间夹角如表所示，试求其变换系数，并证明它们是互相正交的。

	x^1	x^2	x^3
$\bar{x}^1$	135°	60°	120°
$\bar{x}^2$	90°	45°	45°
$\bar{x}^3$	45°	60°	120°

$$答:a_{ij}=\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

5.31　设 $\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}^j=\delta_i^j$,则 $\boldsymbol{a}^1,\boldsymbol{a}^2,\boldsymbol{a}^3$ 称为基矢 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 的互逆基矢(不一定是单位矢量),试建立构成互逆基矢的必要关系,并计算下列矢量的逆矢:

$$\boldsymbol{b}_1=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{b}_2=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

解:由定义(即本题的假设)有

$$\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}^1=1,\quad \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}^1=\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{a}^1=0$$

因此 $\boldsymbol{a}^1$ 垂直于 $\boldsymbol{a}_2$ 和 $\boldsymbol{a}_3$,也就是平行于 $\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3$,即 $\boldsymbol{a}^1=\lambda(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)$。

因为 $\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}^1=1$,即 $\boldsymbol{a}_1\cdot\lambda(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)=1$

所以
$$\lambda=\frac{1}{\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3}=\frac{1}{V}\quad(V\neq0)$$

于是得到
$$\boldsymbol{a}^1=\frac{\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3}{V},\quad \boldsymbol{a}^2=\frac{\boldsymbol{a}_3\times\boldsymbol{a}_1}{V},\quad \boldsymbol{a}^3=\frac{\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2}{V}$$

对于基矢 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,v=\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{b}_2\times\boldsymbol{b}_3=12$,于是

$$\boldsymbol{b}^1=(\boldsymbol{b}_2\times\boldsymbol{b}_3)/12=(\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})/4$$
$$\boldsymbol{b}^2=(\boldsymbol{b}_3\times\boldsymbol{b}_1)/12=-\boldsymbol{i}/3+\boldsymbol{j}/4+\boldsymbol{k}/12$$
$$\boldsymbol{b}^3=(\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{b}_2)/12=2\boldsymbol{i}/3-\boldsymbol{j}/2+5\boldsymbol{k}/6$$

5.33　设 $ds^2=5(dx^1)^2+3(dx^2)^2+4(dx^3)^2-6dx^1dx^2+4dx^2dx^3$,试求 g 与 g^{jk}。

解:$g_{11}=5,g_{22}=3,g_{33}=4,g_{12}=g_{21}=-3,g_{23}=g_{32}=2,g_{13}=g_{31}=0$,于是

$$g=\begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}=4$$

g_{jk} 的余因式 $G(j,k)$:

$G(1,1)=8,\ G(2,2)=20,\ G(3,3)=6,\ G(1,2)=G(2,1)=12,G(2,3)=G(3,2)=-10,\ G(1,3)=G(3,1)=-6$

于是 $g^{11}=2$，　$g^{22}=5$，　$g^{33}=3/2$，　$g^{12}=g^{21}=3$，
$g^{23}=g^{32}=-5/2$，$g^{13}=g^{31}=-3/2$

用(g_{jk})与(g^{jk})相乘应是单位矩阵来校核计算结果。

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3/2 \\ 3 & 5 & -5/2 \\ -3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.34　设 $ds^2=3(dx^1)^2+2(dx^2)^2+4(dx^3)^2-6dx^1dx^3$，试求 g 与 g^{jk}。

答：$g=6$，$(g^{jk})=\begin{pmatrix} 4/3 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5.35　(a) 设 A^p 与 B^q 是矢量，试证 $g_{pq}A^pB^q$ 是不变量；
(b) 再证 $\dfrac{g_{pq}A^pB^q}{\sqrt{(A^pA_p)(B^qB_q)}}$ 是不变量。

证：(a) 因为 g_{pq} 是二阶协变张量，根据5.21题，可知 $g_{pq}A^pB^q$ 是不变量。(b) 因为 $\overline{A}^j\overline{A}_j=\dfrac{\partial\overline{x}^j}{\partial x^p}\dfrac{\partial x^q}{\partial\overline{x}^j}A^pA_q=\delta^p_qA^pA_q=A^pA_p$（不变量）。

A^pA_p，B^qB_q 是不变量，所以 $\sqrt{(A^pA_p)(B^qB_q)}$ 是不变量，于是 $\dfrac{g_{pq}A^pB^q}{\sqrt{(A^pA_p)(B^qB_q)}}$ 是不变量。

我们知道，这就是矢量 A^p 与 B^q 之间夹角的余弦

$$\cos\theta=\frac{g_{pq}A^pB^q}{\sqrt{(A^pA_q)(B^pB_q)}}$$

当 $g_{pq}A^pB^q=A^pB_p=0$时，两矢量正交。

5.36　两组笛卡尔直角坐标轴间夹角的方向余弦部分地列于表中，如果 $\overline{x}^1\overline{x}^2\overline{x}^3$ 也是右手系，试填写表的最下一行的空格。

	x^1	x^2	x^3
$\bar{x}^1$	3/5	—4/5	0
$\bar{x}^2$	0	0	1
$\bar{x}^3$			

答：—4/5，—3/5，0

5.37　试证三维空间里曲线坐标之间夹角的余弦为

$$\cos\theta_{12}=\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}},\cos\theta_{23}=\frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}g_{33}}},\cos\theta_{31}=\frac{g_{31}}{\sqrt{g_{33}g_{11}}}$$

证：沿 x^1坐标曲线，$x^2=$常量，$x^3=$常量，于是度量形式为 $ds^2=g_{11}(dx^1)^2$或$\frac{dx^1}{ds}=1/\sqrt{g_{11}}$，沿 x^1曲线的单位切矢量 $A_1^r=\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\delta_1^r$。

同理可得沿曲线 x^2,x^3的单位切矢量

$$A_2^r=\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\delta_2^r,\quad A_3^r=\frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\delta_3^r$$

A_1^r和 A_2^r之间夹角的余弦

$$\cos\theta_{12}=g_{pq}A_1^pA_2^q=g_{pq}\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\delta_1^p\delta_2^q=\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}$$

用类似的方法可求得其他两个夹角的余弦。

5.39　试证 $L^2=g_{pq}A^pA^q$ 是不变量。

证：A_j 和 A^k 是一矢量的协变分量和逆变分量。于是

$$\bar{A}_p=\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^p}A_j,\ \bar{A}^q=\frac{\partial\bar{x}^q}{\partial x^k}A^k$$

$$\bar{A}_p\bar{A}^p=\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^p}\frac{\partial\bar{x}^p}{\partial x^k}A_jA^k=\delta_k^jA_jA^k=A_jA^j$$

可见 A_jA^j 是不变量，记为 L^2，因此我们可以写

$$L^2=A_jA^j=g_{jk}A^kA^j=g_{pq}A^pA^q$$

5.41　设 $A_j=g_{jk}A^k$，试证 $A^k=g^{jk}A_j$。

证：用 g^{jq} 乘 $A_j=g_{jk}A^k$ 的两边

$$g^{jq}A_j = g^{jq}g_{jk}A^k = \delta_k^q A^k = A^q$$

即

$$A^q=g^{jq}A_j \text{ 或 } A^k=g^{jk}A_j$$

5.43　计算柱极坐标系的共轭基本张量。

解：因为 $ds^2=d\rho^2+\rho^2 d\varphi^2+dz^2$，若 $x^1=\rho, x^2=\varphi, x^3=z$，则 $g_{11}=1, g_{22}=\rho^2, g_{33}=1, g_{12}=g_{21}=g_{23}=g_{32}=g_{13}=g_{31}=0$

所以

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$g=|g_{jk}|=\rho^2$，

$$g^{11}=\frac{g_{11}\text{ 的余因式}}{g}=\frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

$$g^{22}=\frac{g_{22}\text{ 的余因式}}{g}=\frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{\rho^2}$$

$$g^{33}=\frac{g_{33}\text{ 的余因式}}{g}=\frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{vmatrix}=1$$

$$g^{12}=\frac{g_{12}\text{ 的余因式}}{g}=-\frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

还可算得 $g^{jk}=0, j\neq k$。因此得到

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.44　计算球极坐标系的共轭基本张量。

答：

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

5.45　试将下列变换方程写成矩阵形式：(a) 协变矢量的变换方程，(b) 二阶逆变张量的变换方程($N=3$)。

解：(a) $\bar{A}_p=\dfrac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p}A_q$

列矢量形式：
$$\begin{pmatrix}\bar{A}_1\\ \bar{A}_2\\ \bar{A}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1}\\ \dfrac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2}\\ \dfrac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\\ A_3\end{pmatrix}$$

或行矢量形式：
$$(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=(A_1A_2A_3)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \dfrac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \dfrac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3}\\ \dfrac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3}\\ \dfrac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3}\end{pmatrix}$$

(b) $\bar{A}^{pr}=\dfrac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q}\dfrac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s}A^{qs}$

$$\begin{pmatrix}\bar{A}^{11} & \bar{A}^{12} & \bar{A}^{13}\\ \bar{A}^{21} & \bar{A}^{22} & \bar{A}^{23}\\ \bar{A}^{31} & \bar{A}^{32} & \bar{A}^{33}\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3}\\ \dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3}\\ \dfrac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} & \dfrac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{11} & A^{12} & A^{13}\\ A^{21} & A^{22} & A^{23}\\ A^{31} & A^{32} & A^{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1}\\ \dfrac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2}\\ \dfrac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3} & \dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3} & \dfrac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3}\end{pmatrix}$$

5.46　试将下列变换方程写成矩阵形式：(a)逆变矢量的变换方程，(b)二阶协变张量的变换方程，(c)二阶混合张量的变换方程($N=3$)。

答：(a)，(b)略。

(c) $\begin{pmatrix} \overline{A}_1^1 & \overline{A}_2^1 & \overline{A}_3^1 \\ \overline{A}_1^2 & \overline{A}_2^2 & \overline{A}_3^2 \\ \overline{A}_1^3 & \overline{A}_2^3 & \overline{A}_3^3 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \overline{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \overline{x}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \overline{x}^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \overline{x}^3}{\partial x^1} & \frac{\partial \overline{x}^3}{\partial x^2} & \frac{\partial \overline{x}^3}{\partial x^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^2} & \frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^3} \end{pmatrix}$$

5.47　设二阶对称张量 A_{ij}的矩阵表示形式为

$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,试求它的本征值与本征矢量。

解:本征方程$(A-\lambda_{(k)}I)X^{(k)}=0$　(k 不求和,下同)

写成分量形式　　　$(A_{ij}-\lambda_{(k)}\delta_i^j)x_j^{(k)}=0$

在三维欧几里得空间里,

$$(A_{11}-\lambda_{(k)})x_1^{(k)}+A_{12}x_2^{(k)}+A_{13}x_3^{(k)}=0$$
$$A_{21}x_1^{(k)}+(A_{22}-\lambda_{(k)})x_2^{(k)}+A_{23}x_3^{(k)}=0$$
$$A_{31}x_1^{(k)}+A_{32}x_2^{(k)}+(A_{33}-\lambda_{(k)})x_3^{(k)}=0$$

本征方程

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=\lambda(1-\lambda)(\lambda-3)=0$$

得本征值 $\lambda_{(1)}=0,\lambda_{(2)}=1,\lambda_{(3)}=3$。

对于 $\lambda_{(1)}=0$,本征方程化为

$$x_1^{(1)}+x_2^{(1)}=0,\ x_1^{(1)}+2x_2^{(1)}+x_3^{(1)}=0,\ x_2^{(1)}+x_3^{(1)}=0$$

解得 $x_1^{(1)}=-x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}=-x_2^{(1)}$。选 $x_2^{(1)}=-1$,得本征矢量

$$\boldsymbol{x}^{(1)}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$$

对于 $\lambda_{(2)}=1$,本征方程化为 $x_2^{(2)}=0$, $x_1^{(2)}+x_2^{(2)}+x_3^{(2)}=0$。选 $x_1^{(2)}=1$便有 $x_3^{(2)}=-1$,于是得本征矢量

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3$$

对于 $\lambda_{(3)}=3$，本征方程化为 $-2x_1^{(3)}+x_2^{(3)}=0, x_1^{(3)}-x_2^{(3)}+x_3^{(3)}=0, x_2^{(3)}-2x_3^{(3)}=0$。解得 $x_2^{(3)}=2x_1^{(3)}, x_1^{(3)}=x_3^{(3)}$。选 $x_1^{(3)}=1$，便得本征矢量

$$\boldsymbol{x}^{(3)} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$$

显然，本征矢量 $\boldsymbol{x}^{(k)}$是互相正交的。

5.48　设二阶对称张量的矩阵$(A_{ij})=\begin{pmatrix}7 & 3 & 0\\ 3 & 7 & 4\\ 0 & 4 & 7\end{pmatrix}$，试求它的主值和主轴方向。

	x^1	x^2	x^3
$\bar{x}^1$	$-3/5\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$-4/5\sqrt{2}$
$\bar{x}^2$	$4/5$	0	$-3/5$
$\bar{x}^3$	$3/5\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$4/5\sqrt{2}$

答：$\lambda_{(1)}=2,\ \lambda_{(2)}=7,\ \lambda_{(3)}=12$

5.49　将题5.47中张量 A_{ij}化为对角形。

解：用正规正交化法（见附录 B）

首先，设 $\bar{\boldsymbol{e}}_1=\boldsymbol{x}^{(1)}/|\boldsymbol{x}^{(1)}|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)$

其次，$\bar{\boldsymbol{e}}_2=\dfrac{\boldsymbol{x}^{(2)}-(\boldsymbol{x}^{(2)}\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_1)\bar{\boldsymbol{e}}_1}{|\boldsymbol{x}^{(2)}-(\boldsymbol{x}^{(2)}\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_1)\bar{\boldsymbol{e}}_1|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_3$

最后，$\bar{\boldsymbol{e}}_3=\dfrac{\boldsymbol{x}^{(3)}-(\boldsymbol{x}^{(3)}\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_1)\bar{\boldsymbol{e}}_1-(\boldsymbol{x}^{(3)}\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_2)\bar{\boldsymbol{e}}_2}{|\boldsymbol{x}^{(3)}-(\boldsymbol{x}^{(3)}\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_1)\bar{\boldsymbol{e}}_1-(\boldsymbol{x}^{(3)}\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_2)\bar{\boldsymbol{e}}_2|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{e}_1+\dfrac{2}{\sqrt{6}}\boldsymbol{e}_2+\dfrac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{e}_3$

得变换矩阵 $$M_{ij}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$\overline{A}=MAM^T$$

$$(\overline{A}_{ij})$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

5.50 计算张量 $\boldsymbol{B}=(B_{ij})=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 的平方根 $\sqrt{\boldsymbol{B}}$。

答：$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) & \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) & 0 \\ \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) & \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

5.51 设张量 $\boldsymbol{A}=(A_{ij})=\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$，利用 $\boldsymbol{A}^2$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的主轴重合这一结论，求 $\boldsymbol{A}$ 的平方根 $\sqrt{\boldsymbol{A}}$。

解：先求 $\boldsymbol{A}$ 的主值，并化为对角矩阵，

$$\bar{A}=(\bar{A}_{ij})=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{bmatrix}$$

其变换矩阵是 $\boldsymbol{M}=(M_{ij})=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}&1/\sqrt{3}&1/\sqrt{3}\\0&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\-2/\sqrt{6}&1/\sqrt{6}&1/\sqrt{6}\end{bmatrix}$

$$\sqrt{\bar{A}}=(\sqrt{\bar{A}_{ij}})=\begin{bmatrix}\sqrt{3}&0&0\\0&2&0\\0&0&\sqrt{6}\end{bmatrix}$$

$$\sqrt{A}=\boldsymbol{M}^T\ \sqrt{\bar{\boldsymbol{A}}}\,\boldsymbol{M}$$

$$(\sqrt{A_{ij}})=$$

$$\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}&0&-2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3}&0&0\\0&2&0\\0&0&\sqrt{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}&1/\sqrt{3}&1/\sqrt{3}\\0&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\-2/\sqrt{6}&1/\sqrt{6}&1/\sqrt{6}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}+4&\sqrt{2}-2&\sqrt{2}-2\\\sqrt{2}-2&\sqrt{2}+\sqrt{6}+1&\sqrt{2}-\sqrt{6}+1\\\sqrt{2}-2&\sqrt{2}-\sqrt{6}+1&\sqrt{2}+\sqrt{6}+1\end{bmatrix}$$

5.52 设张量 $\boldsymbol{B}=(B_{ij})=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&3&0\\-1&0&-2\end{bmatrix}$，利用凯莱-哈密顿定理求$(\boldsymbol{B})^4$。

答：$\begin{bmatrix}5&0&7\\0&81&0\\7&0&26\end{bmatrix}$。

第六章　张量分析

6.1　试证：(i) $[ij,k]=[ji,k]$，(ii) $\begin{Bmatrix}k\\ij\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}k\\ji\end{Bmatrix}$。

证：

(i) $[ij,k]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)=[ji,k]$

(ii) $\begin{Bmatrix}k\\ij\end{Bmatrix}=g^{kl}[ij,l]=g^{kl}[ji,l]=\begin{Bmatrix}k\\ji\end{Bmatrix}$

6.3　试证$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=[ik,j]+[jk,i]$

证：

$$[ik,j]+[jk,i]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

6.5　计算：当 $i\neq j$ 时，$g_{ij}=0$空间里的第一种克里斯托菲符号。

解：下面不使用求和约定。

当 $i=j=k$，$[ij,k]=[ii,i]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i}$

当 $i=j\neq k$，$[ij,k]=[ii,k]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k}$

当 $i=k\neq j$，$[ij,k]=[ij,i]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^i}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}$

当 $i\neq j\neq k$，$[ij,k]=0$

6.6　计算：当 $i\neq j$ 时，$g_{ij}=0$空间里的第二种克里斯托菲符号。

答：$\begin{Bmatrix}i\\ii\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}\ln g_{ii}$

$$\begin{Bmatrix} k \\ ii \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2g_{kk}}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k},\quad \begin{Bmatrix} i \\ ij \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^j}\ln g_{ii}$$

$$\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} = 0 \quad (i \neq j \neq k)$$

6.7 试求：(i)笛卡尔直角坐标系，(ii)柱极坐标系，(iii)球极坐标系中的第二种克里斯托菲符号。

解：因为在正交坐标系中，当 $i \neq j$ 时，$g_{ij}=0$。所以，可以利用题6.5和题6.6的结果。

(i)在笛卡尔直角坐标系里，$g_{ii}=1$，所以 $\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}=0$。

(ii)在柱极坐标系里，$x^1=\rho, x^2=\varphi, x^3=z$；$g_{11}=1, g_{22}=\rho^2, g_{33}=1$。所以仅在 $i=2$ 时才有不为零的第二种克里斯托菲符号。

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2) = -\rho$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 21 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{1}{\partial \rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2) = \frac{1}{\rho}$$

(iii)在球极坐标系里，$x^1=r, x^2=\theta, x^3=\varphi$；$g_{11}=1, g_{22}=r^2$，$g_{33}=r^2\sin^2\theta$。$i=2$或3时，有不为零的第二种克里斯托菲符号。

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2) = -r$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 21 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{1}{\partial r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2) = \frac{1}{r}$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 33 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin^2\theta) = -r\sin^2\theta$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 33 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = -\frac{1}{2r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}(r^2\sin^2\theta) = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 31 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 13 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2g_{33}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = \frac{1}{2r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin^2\theta) = \frac{1}{r}$$

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 32 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 23 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2g_{33}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = \frac{1}{2r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(r^2\sin^2\theta) = \cos\theta$$

6.8　试求：(i)笛卡尔直角坐标系、(ii)柱极坐标系、(iii)球极坐标系中的第一种克里斯托菲符号。

答：(i)全部为零。(ii)$[22,1]=-\rho$，$[12,2]=[21,2]=\rho$，其他的均为零。(iii)$[22,1]=-r$，$[33,1]=-r\sin^2\theta$，$[33,2]=-r^2\sin\theta\cos\theta$，$[21,2]=[12,2]=r$，$[31,3]=[13,3]=r\sin^2\theta$，$[32,3]=[23,3]=r^2\sin\theta\cos\theta$，其他均为零。

6.9　计算度量为 $ds^2=(dx^1)^2+[(x^2)^2-(x^1)^2](dx^2)^2$ 时的第二种克里斯托菲符号。

解：因为 $g_{11}=1$，$g_{22}=(x^2)^2-(x^1)^2$，$g_{33}=0$，且其他 $g_{ij}=0(i\neq j)$，所以可利用题6.6的结果，于是有

$$\begin{Bmatrix}1\\22\end{Bmatrix}=-\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}=-\frac{1}{2}(-2x^1)=x^1$$

$$\begin{Bmatrix}2\\21\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}=\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}=\frac{-x^1}{(x^2)^2-(x^1)^2}$$

$$\begin{Bmatrix}2\\22\end{Bmatrix}=\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}=\frac{x^2}{(x^2)^2-(x^1)^2}$$

其他均为零。

6.10　计算第二种克里斯托菲符号，相应的度量为(i)$ds^2=(dx^1)^2+(x^1)^2(dx^2)^2+(x^1)^2\sin^2x^2(dx^3)^2$，(ii)$ds^2=(dx^1)^2+G(x^1,x^2)(dx^2)^2$，其中 G 是 x^1和 x^2的函数。

答：只有下列第二种克里斯托菲符号不为零。(i)$\begin{Bmatrix}1\\22\end{Bmatrix}=-x^1$，$\begin{Bmatrix}1\\33\end{Bmatrix}=-x^1\sin^2x^2$，$\begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}=1/x^1$，$\begin{Bmatrix}2\\33\end{Bmatrix}=-\sin x^2\cos x^2$，$\begin{Bmatrix}3\\13\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}3\\31\end{Bmatrix}=1/x^1$，$\begin{Bmatrix}3\\23\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}3\\32\end{Bmatrix}=\operatorname{ctg}x^2$；(ii)$\begin{Bmatrix}1\\22\end{Bmatrix}=-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial x^1}$，$\begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2\\21\end{Bmatrix}=\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial x^1}$，$\begin{Bmatrix}2\\22\end{Bmatrix}=\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial x^2}$。

6.11　试证 $\frac{\partial^2 x^m}{\partial\bar{x}^j\partial\bar{x}^k}=\overline{\begin{Bmatrix}n\\jk\end{Bmatrix}}\frac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^n}-\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^k}\begin{Bmatrix}m\\pq\end{Bmatrix}$。

见 §6.1的式(6.12)。

6.12 试求下列张量相对于 x^q 的协变导数：

(i) $g_{jk}A^k$，(ii) A^jB_k，(iii) $\delta^j_k A_j$。

答：$g_{jk}A^k_{,q}$，$A^j_{,q}B_k + A^jB_{k,q}$，$\delta^j_k A_{j,q}$

6.13 试求下列张量相对于 x^q 的协变导数：

(i) A_{jk}，(ii) A^{jk}，(iii) $A^j_{\cdot k}$，(iv) $A^j_{\cdot kl}$，(v) $A^{jkl}_{\cdots mn}$。

解：

(i) $A_{jk,q} = \dfrac{\partial A_{jk}}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ jq \end{Bmatrix} A_{sk} - \begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix} A_{js}$

(ii) $A^{jk}_{,q} = \dfrac{\partial A^{jk}}{\partial x^q} + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix} A^{sk} + \begin{Bmatrix} k \\ qs \end{Bmatrix} A^{js}$

(iii) $A^j_{\cdot k,q} = \dfrac{\partial A^j_{\cdot k}}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix} A^j_{\cdot s} - \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix} A^s_{\cdot k}$

(iv) $A^j_{\cdot kl,q} = \dfrac{\partial A^j_{\cdot kl}}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix} A^j_{\cdot sl} - \begin{Bmatrix} s \\ lq \end{Bmatrix} A^j_{\cdot ks} + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix} A^s_{\cdot kl}$

(v) $A^{jkl}_{\cdots mn,q} = \dfrac{\partial A^{jks}_{\cdots mn}}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ mq \end{Bmatrix} A^{jkl}_{\cdots sn} - \begin{Bmatrix} s \\ nq \end{Bmatrix} A^{jkl}_{\cdots ms} + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix} A^{skl}_{\cdots mn} + \begin{Bmatrix} k \\ qs \end{Bmatrix} A^{jsl}_{\cdots mn} + \begin{Bmatrix} l \\ qs \end{Bmatrix} A^{jks}_{\cdots mn}$

6.15 设 A_p 是张量，试证 $A_{p,q} = \dfrac{\partial A_p}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} A_s$ 是张量。

证：因为 $\overline{A}_j = \dfrac{\partial x_r}{\partial \overline{x}^j} A_r$，

所以
$$\frac{\partial \overline{A}_j}{\partial \overline{x}^k} = \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial A_r}{\partial x^t}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^k} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial \overline{x}^j \partial \overline{x}^k} A_r$$

将
$$\frac{\partial^2 x^r}{\partial \overline{x}^j \partial \overline{x}^k} = \overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}} \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^n} - \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^k}\begin{Bmatrix} r \\ il \end{Bmatrix}$$

代入上式，得

$$\frac{\partial \overline{A}_j}{\partial \overline{x}^k} = \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial A_r}{\partial x^t} + \overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^n} - \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^k}\begin{Bmatrix} r \\ il \end{Bmatrix} A_r$$

$$= \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial A_p}{\partial x^q} + \overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}}\overline{A}_n - \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k}\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} A_s$$

$$\frac{\partial \overline{A}_j}{\partial \overline{x}^k} - \left\{ \begin{matrix} \overline{n} \\ jk \end{matrix} \right\} \overline{A}_n = \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k} \left(\frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\} A_s \right)$$

可见 $A_{p,q}$是张量。

6.17 试证(i)g_{jk}，(ii)g^{jk}，(iii)δ^j_k 的协变导数为零。

证：

$$g_{jk,q} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ jq \end{matrix} \right\} g_{sk} - \left\{ \begin{matrix} s \\ kq \end{matrix} \right\} g_{js}$$

$$= \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^q} - [jq, k] - [kq, j]$$

根据题6.3，可知 $g_{jk,q} = 0$。

$$\text{(ii)} g^{jk}_{,q} = \frac{\partial g^{jk}}{\partial x^q} + \left\{ \begin{matrix} j \\ qs \end{matrix} \right\} A^{sk} + \left\{ \begin{matrix} k \\ qs \end{matrix} \right\} A^{js}$$

根据6.4题，可知 $g^{jk}_{,q} = 0$。

$$\text{(iii)} \delta^j_{k,q} = \frac{\partial \delta^j_k}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ kq \end{matrix} \right\} \delta^j_s + \left\{ \begin{matrix} j \\ qs \end{matrix} \right\} \delta^s_k = 0 - \left\{ \begin{matrix} j \\ kq \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} j \\ qk \end{matrix} \right\} = 0$$

6.19 试求 $A^{j}_{\cdot k} B^{lm}_{\cdot\cdot n}$相对于 x^q 的协变导数。

解：

$$(A^{j}_{\cdot k} B^{lm}_{\cdot\cdot n})_{,q} = \frac{\partial (A^{j}_{\cdot k} B^{lm}_{\cdot\cdot n})}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ kq \end{matrix} \right\} A^{j}_{\cdot s} B^{lm}_{\cdot\cdot n} - \left\{ \begin{matrix} s \\ nq \end{matrix} \right\} A^{j}_{\cdot k} B^{lm}_{\cdot\cdot s}$$

$$+ \left\{ \begin{matrix} j \\ qs \end{matrix} \right\} A^{s}_{\cdot k} B^{lm}_{\cdot\cdot n} + \left\{ \begin{matrix} l \\ qs \end{matrix} \right\} A^{j}_{\cdot s} B^{sm}_{\cdot\cdot n} + \left\{ \begin{matrix} m \\ qs \end{matrix} \right\} A^{j}_{\cdot k} B^{ls}_{\cdot\cdot n}$$

$$= \left(\frac{\partial A^{j}_{\cdot k}}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ kq \end{matrix} \right\} A^{j}_{\cdot s} + \left\{ \begin{matrix} j \\ qs \end{matrix} \right\} A^{s}_{\cdot k} \right) B^{lm}_{\cdot\cdot n}$$

$$+ A^{j}_{\cdot k} \left(\frac{\partial B^{lm}_{\cdot\cdot n}}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ nq \end{matrix} \right\} B^{lm}_{\cdot\cdot s} + \left\{ \begin{matrix} l \\ qs \end{matrix} \right\} B^{sm}_{\cdot\cdot n} + \left\{ \begin{matrix} m \\ qs \end{matrix} \right\} B^{ls}_{\cdot\cdot n} \right)$$

$$= A^{j}_{\cdot k,q} B^{lm}_{\cdot\cdot n} + A^{j}_{\cdot k} B^{lm}_{\cdot\cdot n,q}$$

6.21 试证$(g_{jk} A^{km}_{\cdot\cdot n})_{,q} = g_{jk} A^{km}_{\cdot\cdot n,q}$

证：因为 $g_{jk,q} = 0$，所以

$$(g_{jk} A^{km}_{\cdot\cdot n})_{,q} = g_{jk,q} A^{km}_{\cdot\cdot n} + g_{jk} A^{km}_{\cdot\cdot n,q} = g_{jk} A^{km}_{\cdot\cdot n}$$

6.23　在柱极坐标系中，试用逆变矢量 A^p 的物理分量表示 A^p 的散度 $\mathrm{div}A^p$。

解：柱极坐标系 $x^1=\rho,x^2=\varphi,x^3=z$，

$$g=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \rho^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\rho^2,\ \sqrt{g}=\rho$$

用 A_ρ,A_φ,A_z 表示 A^p 的物理分量，则

$$A_\rho=\sqrt{g_{11}}A^1=A^1,\quad A_\varphi=\sqrt{g_{22}}A^2=\rho A^2,\quad A_z=\sqrt{g_{33}}A^3=A^3$$

$$\mathrm{div}A^p=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}A^k)$$

$$=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho)+\frac{\partial}{\partial\varphi}A_\varphi+\frac{\partial}{\partial z}(\rho A_z)\right]$$

6.24　在球极坐标系里，试用 A^p 的物理分量表示 $\mathrm{div}A^p$。

答：$\mathrm{div}A^p=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$

6.25　在(i)柱极坐标系，(ii)球极坐标系里计算 $\nabla^2\Phi$。

解：$\mathrm{grad}\Phi=\nabla\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x^r}=\Phi_{,r}$

与 $\Phi_{,r}$ 相伴的一阶逆变张量是 $A^p=g^{kr}\frac{\partial\Phi}{\partial x^r}$，根据式(6.42)有

$$\nabla^2\Phi=\mathrm{div}\left(g^{kr}\frac{\partial\Phi}{\partial x^r}\right)=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}\,g^{kr}\frac{\partial\Phi}{\partial x^r}\right)$$

(i)在柱极坐标系中，$g^{11}=1,g^{22}=1/\rho^2,g^{33}=1,\sqrt{g}=\rho$。所以

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right]$$

$$=\frac{\partial^2\Phi}{\partial^2\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

(ii)在球极坐标系里，$g^{11}=1,g^{22}=1/r^2,g^{33}=1/r^2\sin^2\theta$，$\sqrt{g}=1/r^2\sin\theta$，所以

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$

6.27　设下列张量是 t 的可导函数，试求它们的内禀导数：(i)不变量 Φ，(ii)A^j，(iii)$A^j_{\cdot k}$，(iv)$A^{jk}_{\cdot\cdot lmn}$。

解：

(i)　$$\frac{\delta\Phi}{\delta t}=\Phi_{,q}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\Phi}{\partial x^q}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

(ii)　$$\frac{\delta A^j}{\delta t}=A^j_{,q}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial A^j}{\partial x^q}+\begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}A^s\right)\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{\partial A^j}{\partial x^q}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}+\begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}A^s\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}A^j}{\mathrm{d}t}+\begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}A^s\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}$$

(iii)　$$\frac{\delta A^j_{\cdot k}}{\delta t}=A^j_{\cdot k,q}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial A^j_{\cdot k}}{\partial x^q}-\begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix}A^j_{\cdot s}+\begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}\right)A^s_{\cdot k}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{\mathrm{d}A^j_{\cdot k}}{\mathrm{d}t}-\begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix}A^j_{\cdot s}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}+\begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}A^s_{\cdot k}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}$$

(iv)　$$\frac{\delta A^{jk}_{\cdot\cdot lmn}}{\delta t}=A^{jk}_{\cdot\cdot lmn,q}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial A^{jk}_{\cdot\cdot lmn}}{\partial x^q}-\begin{Bmatrix} s \\ lq \end{Bmatrix}A^{jk}_{\cdot\cdot smn}\right.$$

$$\left.-\begin{Bmatrix} s \\ mq \end{Bmatrix}A^{jk}_{\cdot\cdot lsn}-\begin{Bmatrix} s \\ nq \end{Bmatrix}A^{jk}_{\cdot\cdot lms}+\begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}A^{sk}_{\cdot\cdot lmn}+\begin{Bmatrix} k \\ qs \end{Bmatrix}A^{js}_{\cdot\cdot lmn}\right)\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{\mathrm{d}A^{jk}_{\cdot\cdot lmn}}{\mathrm{d}t}-\begin{Bmatrix} s \\ lq \end{Bmatrix}A^{jk}_{\cdot\cdot smn}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}-\begin{Bmatrix} s \\ mq \end{Bmatrix}A^{jk}_{\cdot\cdot lsn}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}-\begin{Bmatrix} s \\ nq \end{Bmatrix}A^{jk}_{\cdot\cdot lms}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}$$

$$+\begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}A^{sk}_{\cdot\cdot lmn}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}+\begin{Bmatrix} k \\ qs \end{Bmatrix}A^{js}_{\cdot\cdot lmn}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}$$

6.28　试求(i)$g_{jk}A^k$，(ii)$\delta^k_j A_j$，(iii)$g_{jk}\delta^j_r A^r_p$ 的内禀导数。

答：

(i)　$$g_{jk}\frac{\delta A^k}{\delta t}=g_{jk}\left(\frac{\mathrm{d}A^k}{\mathrm{d}t}+\begin{Bmatrix} k \\ qs \end{Bmatrix}A^s\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}\right)$$

(ii) $\delta_k^j \dfrac{\delta A_j}{\delta t} = \dfrac{\mathrm{d}A_k}{\mathrm{d}t} - \begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix} A_s \dfrac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}$

(iii) $g_{jk}\delta_r^j \dfrac{\delta A^r_{\cdot p}}{\delta t} = g_{rk}\left(\dfrac{\mathrm{d}A^r_{\cdot p}}{\mathrm{d}t} - \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} A^r_{\cdot s} \dfrac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t} + \begin{Bmatrix} r \\ qs \end{Bmatrix} A^s_{\cdot p} \dfrac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t} \right)$

6.30　试证$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g^{ij}A_iA_j) = 2g^{ij}A_i \dfrac{\delta A_j}{\delta t}$。

6.31　设 $A^p_{\cdot q}$与 $B^{rs}_{\cdot\cdot t}$分别是权为 ω_1和 ω_2的相对张量，试证它们的内积与外积是权为 $\omega_1+\omega_2$的相对张量。

证：由假设有

$$\overline{A}^j_{\cdot k} = \left|\frac{\partial \overline{x}}{\partial x}\right|^{-\omega_1} \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k} A^p_{\cdot q}$$

$$\overline{B}^{lm}_{\cdot\cdot n} = \left|\frac{\partial \overline{x}}{\partial x}\right|^{-\omega_2} \frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^r} \frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^s} \frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^n} B^{rs}_{\cdot\cdot t}$$

外积

$$\overline{A}^j_{\cdot k}\overline{B}^{lm}_{\cdot\cdot n} = \left|\frac{\partial \overline{x}}{\partial x}\right|^{-(\omega_1+\omega_2)} \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k} \frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^r} \frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^s} \frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^n} A^p_{\cdot q} B^{rs}_{\cdot\cdot t}$$

可见外积是权为 $\omega_1+\omega_2$的相对张量。任何内积都是外积的缩并，所以内积也是权为 $\omega_1+\omega_2$的相对张量。

附录 C　曲线坐标系

$C.1$　试用柱面坐标系表示矢量 $\boldsymbol{a}=z\boldsymbol{i}-2x\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k}$。

解:由附录 C 的例1有

$$\boldsymbol{e}_\rho=\cos\varphi\,\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j} \quad \text{(i)}$$

$$\boldsymbol{e}_\varphi=-\sin\varphi\,\boldsymbol{i}+\cos\varphi\boldsymbol{j} \quad \text{(ii)}$$

$$\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{k} \quad \text{(iii)}$$

联立解(i)与(ii)得

$$\boldsymbol{i}=\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_\rho-\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi,\quad \boldsymbol{j}=\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_\rho+\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi$$

于是　$\boldsymbol{a}=z\boldsymbol{i}-2x\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k}$

$$=z(\cos\varphi\boldsymbol{e}_\rho-\sin\varphi\boldsymbol{e}_\rho)-2\rho\cos\varphi(\sin\varphi\boldsymbol{e}_\rho+\cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)+\rho\sin\varphi\boldsymbol{e}_z$$

$=(z\cos\varphi-2\rho\sin\varphi\cos\varphi)\boldsymbol{e}_\rho-(z\sin\varphi-2\rho\cos^2\varphi)\boldsymbol{e}_\varphi+\rho\sin\varphi\boldsymbol{e}_z$

以及　$a_\rho=z\cos\varphi-2\rho\sin\varphi\cos\varphi$,　$a_\varphi=-z\sin\varphi-2\rho\cos^2\varphi$,

$a_z=\rho\sin\varphi$。

$C.3$　试证 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\rho=\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\varphi=-\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\rho$,式中字母上的圆点表示对时间的导数。

证:根据附录 C 的例1有

$$\boldsymbol{e}_\rho=\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{e}_\varphi=-\sin\varphi\boldsymbol{i}+\cos\varphi\boldsymbol{j}$$

于是　$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\rho=-(\sin\varphi)\dot{\varphi}\boldsymbol{i}+(\cos\varphi)\dot{\varphi}\boldsymbol{j}=-(\sin\varphi\boldsymbol{i}+\cos\varphi\boldsymbol{j})\dot{\varphi}=\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\varphi=-(\cos\varphi)\dot{\varphi}\boldsymbol{i}-(\sin\varphi)\dot{\varphi}\boldsymbol{j}=-(\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j})\dot{\varphi}=-\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\rho$$

$C.5$　试求柱面坐标系中的弧元平方,并确定相应的纯量因子。

解:方法一

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z$$

$\mathrm{d}x=-\rho\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi+\cos\varphi\,\mathrm{d}\rho,\mathrm{d}y=\rho\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi+\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho,\mathrm{d}z=\mathrm{d}z$

于是　$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2$

$$=(-\rho\sin\varphi d\varphi+\cos\varphi d\rho)^2+(\rho\cos\varphi d\varphi+\sin\varphi d\rho)^2+(dz)^2$$
$$=(d\rho)^2+\rho^2(d\varphi)^2+(dz)^2=h_1^2(d\rho)^2+h_2^2(d\varphi)^2+h_3^2(dz)^2$$

故有纯量因子 $h_1=h_\rho=1$，$h_2=h_\varphi=\rho$，$h_3=h_z=1$。

方法二

位矢 $\quad r=\rho\cos\varphi i+\rho\sin\varphi j+zk$

于是 $\quad dr=\frac{\partial r}{\partial\rho}d\rho+\frac{\partial r}{\partial\varphi}d\varphi+\frac{\partial r}{\partial z}dz$

$$=(\cos\varphi i+\sin\varphi j)d\rho+(-\rho\sin\varphi i+\rho\cos\varphi j)d\varphi+kdz$$
$$=(\cos\varphi d\rho-\rho\sin\varphi d\varphi)i+(\sin\varphi d\rho+\rho\cos\varphi d\varphi)j+kdz$$

故有 $\quad ds^2=dr\cdot dr$

$$=(\cos\varphi d\rho-\rho\sin\varphi d\varphi)^2+(\sin\varphi d\rho+\rho\cos\varphi d\varphi)^2+(dz)^2$$
$$=(d\rho)^2+\rho^2(d\varphi)^2+(dz)^2$$

C.6 试求椭圆柱坐标系中的弧元平方，并确定相应的纯量因子。

答：$ds^2=a^2(\sinh^2u+\sin^2v)(du^2+dv^2)+dz^2$

$h_u=h_v=a\sqrt{\sinh^2u+\sin^2v}$，$\quad h_z=1$

7 试用球面坐标系解附录 C 的题 C.5。

解：$\quad x=r\sin\theta\cos\varphi$，$y=r\sin\theta\sin\varphi$，$z=r\cos\theta$

于是 $\quad dx=-r\sin\theta\sin\varphi d\varphi+r\cos\theta\cos\varphi d\theta+\sin\theta\cos\varphi dr$

$dy=r\sin\theta\cos\varphi d\varphi+r\cos\theta\sin\varphi d\theta+\sin\theta\sin\varphi dr$

$dz=-r\sin\theta d\theta+\cos\theta dr$

$ds^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2=(dr)^2+r^2(d\theta)^2+r^2\sin^2\theta(d\varphi)^2$

故纯量因子为 $\quad h_1=h_r=1$，$h_2=h_\theta=r$，$h_3=h_\varphi=r\sin\theta$

C.9 试求柱面坐标系与球面坐标系中的体积元。

解：正交曲线坐标系 u_1、u_2、u_3中的体积元是

$$dV=h_1h_2h_3du_1du_2du_3$$

(i)柱面坐标系：$u_1=\rho,u_2=\varphi,u_3=z$；$h_1=1,h_2=\rho,h_3=1$

故有 $\quad dV=(1)(\rho)(1)d\rho d\varphi dz=\rho d\rho d\varphi dz$

(ii) 球面坐标系：$u_1=r,u_2=\theta,u_3=\varphi$；$h_1=1,h_2=r,h_3=r\sin\theta$

故有 $dV = (1)(r)(r\sin\theta)drd\theta d\varphi = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$

$C.10$ 试求椭圆柱坐标系中的体积元

答：$a^2(\sinh^2u+\sin^2v)dudvdz$

$C.11$ 设 u_1、u_2、u_3是正交曲线坐标，试证 x、y、z 相对于 u_1、u_2、u_3的雅可毕(Jacobian)为 $h_1h_2h_3$。

证：

$$J\left(\frac{x,y,z}{u_1,u_2,u_3}\right) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,u_2,u_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x}{\partial u_3} & \frac{\partial y}{\partial u_3} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial u_1}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial u_1}\boldsymbol{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u_2}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial u_2}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\boldsymbol{k}\right)$$

$$\times \left(\frac{\partial x}{\partial u_3}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial u_3}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial u_3}\boldsymbol{k}\right) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}$$

$$= h_1\boldsymbol{e}_1 \cdot h_2\boldsymbol{e}_2 \times h_3\boldsymbol{e}_3 = h_1h_2h_3\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = h_1h_2h_3$$

$C.12$ 试求柱面坐标系与球面坐标系中的雅可毕。

答：(i) ρ，(ii) $r^2\sin\theta$。

$C.13$ 设u_1、u_2、u_3为广义坐标，试证$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}$、$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}$、$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}$与$\nabla u_1$、$\nabla u_2$、$\nabla u_3$为互逆系，

证：我们所要证明的是$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_p}\cdot\nabla u_q = \begin{cases}1 & 若\ p=q \\ 0 & 若\ p\neq q\end{cases}$，式中 p 与 q 可以是1，2，3的任何值。

$$d\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}du_3$$

左点乘$\nabla u_1\cdot$，有

$$\nabla u_1 \cdot d\boldsymbol{r} = du_1 + \left(\nabla u_1 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\right)du_1 + \left(\nabla u_1 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\right)du_2$$

$$+\left(\nabla u_1\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}\right)\mathrm{d}u_3$$

或 $\nabla u_1\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}=1,\quad \nabla u_1\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}=0,\quad \nabla u_1\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}=0$

同理，左点乘∇u_2、∇u_3，可得所证结果。

C.14 试求柱面坐标系与球面坐标系中的$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}$、$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}$、$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}$及$\nabla u_1$、$\nabla u_2$、$\nabla u_3$。并证明这些系中$\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{E}_2$、$\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{E}_3$。

答：(i) 柱面坐标系：

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho}=\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j},\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}=-\rho\sin\varphi\boldsymbol{i}+\rho\cos\varphi\boldsymbol{j},\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}=\boldsymbol{k};$$

$$\nabla\rho=\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j},\ \nabla\varphi=\frac{-\sin\varphi\boldsymbol{i}+\cos\varphi\boldsymbol{j}}{\rho},\ \nabla z=\boldsymbol{k}$$

(ii)球面坐标系：

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}=\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j}+\cos\theta\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}=r\cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i}+r\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{j}-r\sin\theta\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}=-r\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{i}+r\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{j}$$

$$\nabla r=\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j}+\cos\theta\boldsymbol{k}$$

$$\nabla\theta=\frac{xz\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}-(x^2+y^2)\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{i}+\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{j}-\sin\theta\boldsymbol{k}}{r}$$

$$\nabla\varphi=\frac{-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}}{x^2+y^2}=\frac{-\sin\varphi\boldsymbol{i}+\cos\varphi\boldsymbol{j}}{r\sin\theta}$$

15 试证$\left\{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}\right\}\{\nabla u_1\cdot\nabla u_2\times\nabla u_3\}=1$

证：由附录C的题13可知，$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}$、$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}$、$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}$与$\nabla u_1$、$\nabla u_2$、$\nabla u_3$是互逆矢量组。于是有1.51题(i)中的结果。

由题C.13有

$$\nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \times \nabla u_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{vmatrix} = J\left(\frac{u_1, u_2, u_3}{x, y, z}\right)$$

所以 $J\left(\frac{x, y, z}{u_1, u_2, u_3}\right) J\left(\frac{u_1, u_2, u_3}{x, y, z}\right) = 1$，即为所证。

C.16 设有 $x^2 - y^2 = 2u_1\cos u_2$，$xy = u_1\sin u_2$，$z = u_3$。(i)证明该系为正交系，(ii)求雅可毕。

答：(ii)$\frac{1}{2}$。

C.17 推导正交曲线坐标系中$\nabla\Phi$的表示式。

解：设$\nabla\Phi = f_1\boldsymbol{e}_1 + f_2\boldsymbol{e}_2 + f_3\boldsymbol{e}_3$，式中 f_1、f_2、f_3待定。

因为 $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\mathrm{d}u_2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}\mathrm{d}u_3 = h_1\boldsymbol{e}_1\mathrm{d}u_1 + h_2\boldsymbol{e}_2\mathrm{d}u_2 + h_3\boldsymbol{e}_3\mathrm{d}u_3$

又有 $$\mathrm{d}\Phi = \nabla\Phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = h_1 f_1 \mathrm{d}u_1 + h_2 f_2 \mathrm{d}u_2 + h_3 f_3 \mathrm{d}u_3 \qquad \text{(i)}$$

但 $$\mathrm{d}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\mathrm{d}u_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\mathrm{d}u_3 \qquad \text{(ii)}$$

(i)=(ii)故有 $f_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}$，$f_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}$，$f_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}$

$$\nabla\Phi = \frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1} + \frac{\boldsymbol{e}_2}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2} + \frac{\boldsymbol{e}_3}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}$$

算子∇可表为$\nabla = \frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\boldsymbol{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\boldsymbol{e}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}$

C.18 推导球面坐标系中$\nabla\Psi$与$\nabla\cdot\boldsymbol{a}$的表示式。

答：(i) $\nabla\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$

(ii) $\nabla\cdot\boldsymbol{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta a_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}$

C.19 设 u_1、u_2、u_3为正交坐标系，(i)证明$|\nabla u_p| = h_p^{-1}$，$p = 1, 2, 3$；(ii)证明 $\boldsymbol{e}_p = \boldsymbol{E}_p$。

证：(i)在题 C.17中，令 $\Phi = u_1$，则

$\nabla u_1=\dfrac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}$，于是 $|\nabla u_1|=|\boldsymbol{e}_1|/h_1=h_1^{-1}$（因 $|\boldsymbol{e}_1|=1$）。
同理，令 $\Phi=u_2$ 或 u_3 时，可得 $|\nabla u_2|=h_2^{-1}$，$|\nabla u_3|=h_3^{-1}$。

(ii) 定义 $\boldsymbol{E}_p=\dfrac{\nabla u_p}{|\nabla u_p|}$，由上述证明有

$$\boldsymbol{E}_p = h_p \nabla u_p = \boldsymbol{e}_p$$

$C.20$　给定下列坐标变换 $u_1=xy, 2u_2=x^2+y^2, u_3=z$。(i)证明坐标系是正交的；(ii)求雅可毕；(iii) 求 $\mathrm{d}s^2$。

答：(ii) $\dfrac{1}{y^2-x^2}$，(iii) $\mathrm{d}s^2=\dfrac{(x^2+y^2)(\mathrm{d}u_1^2+\mathrm{d}u_2^2)-4xy\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2}{(x^2-y^2)^2}$
$+\mathrm{d}u_3^2=\dfrac{u_2(\mathrm{d}u_1^2+\mathrm{d}u_2^2)-2u_1\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2}{2(u_2^2-u_1^2)}+\mathrm{d}u_3^2$

$C.21$　设 u_1、u_2、u_3 是正交坐标系，试证 $\boldsymbol{e}_1=h_2h_3\nabla u_2\times\nabla u_3$ 以及 $\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 与此相应的表示式。

证：由题 $C.19$ 可知 $\nabla u_1=\dfrac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}$，$\nabla u_2=\dfrac{\boldsymbol{e}_2}{h_2}$，$\nabla u_3=\dfrac{\boldsymbol{e}_3}{h_3}$ 于是 $\nabla u_2\times$
$\nabla u_3=\dfrac{\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}{h_2h_3}=\dfrac{\boldsymbol{e}_1}{h_2h_3}$ 即 $\boldsymbol{e}_1=h_2h_3\nabla u_2\times\nabla u_3$
同理可得　$\boldsymbol{e}_2=h_3h_1\nabla u_3\times\nabla u_1$　$\boldsymbol{e}_3=h_1h_2\nabla u_1\times\nabla u_2$

$C.22$　试求半径为 a 的球面上的弧元。

答：$\mathrm{d}s^2=a^2[\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2]$

$C.23$　试证正交坐标系中

$$\nabla\times(a_1\boldsymbol{e}_1)=\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_3h_1}\frac{\partial}{\partial u_3}(a_1h_1)-\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(a_1h_1)$$

证：

$$\begin{aligned}\nabla\times(a_1\boldsymbol{e}_1)&=\nabla\times(a_1h_1\nabla u_1)\\&=\nabla(a_1h_1)\times\nabla u_1+a_1h_1\nabla\times\nabla u_1\\&=\nabla(a_1h_1)\times\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}+\mathbf{0}\\&=\left[\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}(a_1h_1)+\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(a_1h_1)+\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(a_1h_1)\right]\times\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}\\&=\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_3h_1}\frac{\partial}{\partial u_3}(a_1h_1)-\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(a_1h_1)\end{aligned}$$

$C.24$　试证正交坐标系中

$$\nabla\cdot(a_1\boldsymbol{e}_1)=\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}(a_1h_2h_3)$$

$C.25$　推导正交坐标系中 $\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=\nabla\times\boldsymbol{a}$ 的表示式。

解：$\nabla\times\boldsymbol{a}=\nabla\times(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3)$

$$=\nabla\times(a_1\boldsymbol{e}_1)+\nabla\times(a_2\boldsymbol{e}_2)+\nabla\times(a_3\boldsymbol{e}_3)$$

根据附录 C 题23，有

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{a}=&\left[\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_3h_1}\frac{\partial}{\partial u_3}(a_1h_1)-\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(a_1h_1)\right]+\left[\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_1}(a_2h_2)\right.\\&\left.-\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(a_2h_2)\right]+\left[\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}(a_3h_3)-\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_3h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}(a_3h_3)\right]\\=&\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(a_3h_3)-\frac{\partial}{\partial u_3}(a_2h_2)\right]+\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_3h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(a_1h_1)\right.\\&\left.-\frac{\partial}{\partial u_1}(a_3h_3)\right]+\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(a_2h_2)-\frac{\partial}{\partial u_2}(a_1h_1)\right]\end{aligned}$$

即

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{a}=\nabla\times\boldsymbol{a}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix}h_1\boldsymbol{e}_1 & h_2\boldsymbol{e}_2 & h_3\boldsymbol{e}_3\\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3}\\ a_1h_1 & a_2h_2 & a_3h_3\end{vmatrix}$$

$C.26$　推导正交坐标系中 $\mathrm{div}\boldsymbol{a}=\nabla\cdot\boldsymbol{a}$ 的表示式。

答：$\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(a_1h_2h_3)+\frac{\partial}{\partial u_2}(a_2h_3h_1)+\frac{\partial}{\partial u_3}(a_3h_1h_2)\right]$

$C.27$　推导正交坐标系中 $\nabla^2\Psi$ 的表示式。

解：由题 $C.17$ 有 $\nabla\Psi=\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}\frac{\partial\Psi}{\partial u_1}+\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_2}\frac{\partial\Psi}{\partial u_2}+\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_3}\frac{\partial\Psi}{\partial u_3}$ 设 $\boldsymbol{a}=\nabla\Psi$，则

$a_1=\frac{1}{h_1}\frac{\partial\Psi}{\partial u_1}, a_2=\frac{1}{h_2}\frac{\partial\Psi}{\partial u_2}, a_3=\frac{1}{h_3}\frac{\partial\Psi}{\partial u_3}$

应用题 $C.26$ 的结果，可得

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{a}&=\nabla\cdot\nabla\Psi=\nabla^2\Psi\\&=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\Psi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\Psi}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\Psi}{\partial u_3}\right)\right]\end{aligned}$$

C.28　试写出椭圆柱坐标系中的方程$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\Phi$。

答：$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}=a^2(\sinh^2u+\sin^2v)\Phi$

C.29　推导柱面坐标系中$\nabla\times\boldsymbol{a}$与$\nabla^2\Phi$的表示式。

解：

$$\text{(i)}\ \nabla\times\boldsymbol{a}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\boldsymbol{e}_1 & h_2\boldsymbol{e}_2 & h_3\boldsymbol{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1a_1 & h_2a_2 & h_3a_3 \end{vmatrix}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \rho\boldsymbol{e}_\varphi & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_\rho & \rho a_\varphi & a_z \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{\rho}\left\{\left[\frac{\partial a_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial z}(\rho a_\varphi)\right]\boldsymbol{e}_\rho+\left(\rho\frac{\partial a_\rho}{\partial z}-\rho\frac{\partial a_z}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{e}_\varphi\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho a_\varphi)-\frac{\partial a_\rho}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{e}_z\right\}$$

$$\text{(ii)}\ \nabla^2\Phi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{(1)(\rho)(1)}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

C.30　推导柱面坐标系中$\nabla\Phi$与$\nabla\cdot\boldsymbol{a}$的表示式。

答：$\nabla\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho a_\rho)+\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial z}(\rho a_z)\right]$$

C.31　推导球面坐标系中$\nabla^2\Psi$的表示式。

解：

$$\nabla^2\Psi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\Psi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\Psi}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\Psi}{\partial u_3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{(1)(r)(r\sin\theta)}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{(r)(r\sin\theta)}{(1)}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{(r\sin\theta)(1)}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{(1)(r)}{r\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}\right]$$

$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}$$

C.32　推导球面坐标系中$\nabla\times\boldsymbol{a}$的表示式。

答：

$$\nabla\times\boldsymbol{a}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta a_\varphi-\frac{\partial}{\partial\varphi}(ra_\theta)\right]\boldsymbol{e}_r\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta a_\varphi)\right]r\boldsymbol{e}_\theta+\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_\theta)-\frac{\partial a_r}{\partial\theta}\right]r\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi\right\}$$

参 考 文 献

1 Synge J. L. & Schild A., Tensor Calculus, 2nd ed., Toronto: University Toronto press, 1952.

2 Spain B. Tensor Calculus. 1952.

3 Brand L., Vector Analysis, London, Chapman & Hall, Ltd., 1957.

4 Bickley W. G. & Gibson R. E., Via Vector to Tensor, London, The English University Press Ltd., 1962.

5 Eringen A C 主编. 钱伟长译. 张量分析(现代连续统物理丛书(I)). 南京: 江苏科学技术出版社, 1981.

6 Weatherburn C E. An Introduction to Riemannian Geometry and the Tensor Calculus, 1942.

7 [日]小西荣一等著. 刘俊山译. 线性代数——向量分析. 沈阳: 辽宁人民出版社, 1981.

8 Coburn N., Vector and Tensor Analysis, New York: Macmillan, 1955.

9 Spiegel, M. R. Theory and Problems of Vector Analysis and an Introduction to Tensor Analysis, New York: Mcgrow-hill, 1974.

10 Mase G E. Theory and Problems of Continuum Mechanics, New York: Mcgrow-hill, 1970.